INGENIEUR-ARCHIV

UNTER MITWIRKUNG DER
GESELLSCHAFT FÜR ANGEWANDTE MATHEMATIK UND MECHANIK
ZUSAMMEN MIT

A. BETZ · K. KLOTTER · E. METTLER · K. v. SANDEN
F. SCHLEICHER · E. SCHMIDT · E. SÖRENSEN

HERAUSGEGEBEN VON

R. GRAMMEL

XXIII. BAND SECHSTES (SCHLUSS-) HEFT 1955

SPRINGER-VERLAG · BERLIN / GÖTTINGEN / HEIDELBERG

Ing.-Archiv

Preis DM 11,20

Das

INGENIEUR-ARCHIV

erscheint nach Maßgabe des eingehenden Materials zwanglos in einzeln berechneten Heften, die zu Bänden vereinigt werden.

Die für das Ingenieur-Archiv bestimmten Manuskripte sind unmittelbar an den Herausgeber
Herrn Professor Dr.-Ing. Dr. **R. Grammel**, Stuttgart N, Robert-Bosch-Straße 101
oder an die Herren
Professor Dr.-Ing. Dr. **A. Betz**, Göttingen, Herzberger Landstraße 39 A
Professor Dr.-Ing. **K. Klotter**, Stanford (Calif.), 621 Alvarado Row.
Professor Dr. **E. Mettler**, Karlsruhe-Durlach, Geigersberger Str. 12
Professor Dr.-Ing. **K. v. Sanden**, Neureut über Karlsruhe, Rosmarinstraße 11
Professor Dr.-Ing. **F. Schleicher**, Dortmund, Plauener Str. 44
Professor Dr.-Ing. **E. Schmidt**, Technische Hochschule, München, Arcisstr. 21
Professor Dr.-Ing. **E. Sörensen**, Augsburg, MAN
einzusenden.

Die zum Druck angenommenen Arbeiten werden, soweit dies drucktechnisch möglich ist, nach der Reihenfolge ihres Eingangs beim Herausgeber veröffentlicht.

Die Mitarbeiter erhalten von ihrer Arbeit zusammen 75 Sonderdrucke unentgeltlich.

Für die Abfassung der Arbeiten wird auf das vom Deutschen Normenausschuß herausgegebene Heft „Gestaltung technisch-wissenschaftlicher Veröffentlichungen" hingewiesen. Die Vorlagen für Abbildungen sind auf besonderen Blättern erwünscht und können entweder in Reinzeichnungen oder in klarverständlichen Handskizzen bestehen; die Beschriftung und nötigenfalls die Reinzeichnung nimmt der Verlag vor.

Mit der Annahme des Manuskriptes erwirbt der Verlag das ausschließliche Verlagsrecht für alle Sprachen und Länder.

Im „Ingenieur-Archiv" erscheinende Arbeiten dürfen vorher an anderer Stelle nicht veröffentlicht sein und auch später nicht anderweitig veröffentlicht werden.

Photographische Vervielfältigungen, Mikrofilme, Mikrophote von ganzen Heften, einzelnen Beiträgen oder Teilen daraus sind ohne ausdrückliche Genehmigung des Verlages nicht gestattet.

SPRINGER-VERLAG

Heidelberg
Neuenheimer Landstraße 24 / Fernsprecher 27 901—4 /

Berlin W 35
Reichpietschufer 20 / Fernsprecher Sammel-Nr. 24 92 51

Inhalt:

Seite

Isay, W.-H., Zur Behandlung der Strömung durch einen Voith-Schneider-Propeller mit kleinem Fortschrittsgrad. Mit 9 Textabbildungen 379

Volterra, E., The Equations of Motion for Curved Elastic Bars deduced by the use of the „Method of Internal Constraints". Mit 1 Textabbildung 402

Volterra, E., A One-Dimensional Theory of Wave-Propagation in Elastic Rods Based on the „Method of Internal Constraints". Mit 2 Textabbildungen 410

Björklund, A., Beitrag zur Theorie der elastischen Ringe mit Berücksichtigung der Wölbbehinderung. Mit 9 Textabbildungen 421

Eppler, R., Die Berechnung von Tragflügelprofilen aus der Druckverteilung. Mit 6 Textabbildungen 436

INGENIEUR-ARCHIV

XXIII. BAND SECHSTES (SCHLUSS-)HEFT 1955

Zur Behandlung der Strömung durch einen Voith-Schneider-Propeller mit kleinem Fortschrittsgrad

Von W.-H. Isay

1. Einleitung. Wir betrachten die Strömung durch einen rotierenden Voith-Schneider-Propeller mit sechs Flügeln. Die Strömung sei eine inkompressible Potentialströmung, und wir bauen das Strömungsfeld auf, indem wir die Flügelprofile nach der in der Schaufelgittertheorie bewährten Weise mit Zirkulationsverteilungen belegen. Der Propeller liege in einer konstanten Anströmung mit der Absolutgeschwindigkeit u_0 in Richtung der positiven x-Achse. Da es sich um ein instationäres Problem handelt, das sich auch nicht quasistationär machen läßt, ändern sich die auf den einzelnen Propellerflügeln angeordneten Zirkulationsverteilungen dauernd, und durch die zeitliche Änderung der festen Wirbelelemente werden freie Wirbel induziert, die mit der Strömung in Richtung der positiven x-Achse fortgetragen werden[1]. Das (absolute) Strömungsfeld in einem bestimmten Punkt ($x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$) der Ebene besteht also neben der konstanten Strömung u_0 aus den beiden von den gebundenen und den freien Wirbeln induzierten Geschwindigkeitsanteilen. Wir werden beide Anteile getrennt berechnen.

2. Das Geschwindigkeitsfeld der gebundenen Wirbel. Zur Berechnung des von den gebundenen Wirbeln auf den Propellerflügeln induzierten Geschwindigkeitsfeldes können wir voraussetzen, daß die Konturkurve des Propellerflügels angenähert mit der Kreisbahn des Propellerradius R zusammenfalle (Abb. 1), jedenfalls insoweit, als wir die Zirkulationsverteilungen der Propellerflügel auf dem Kreisumfang anbringen können.

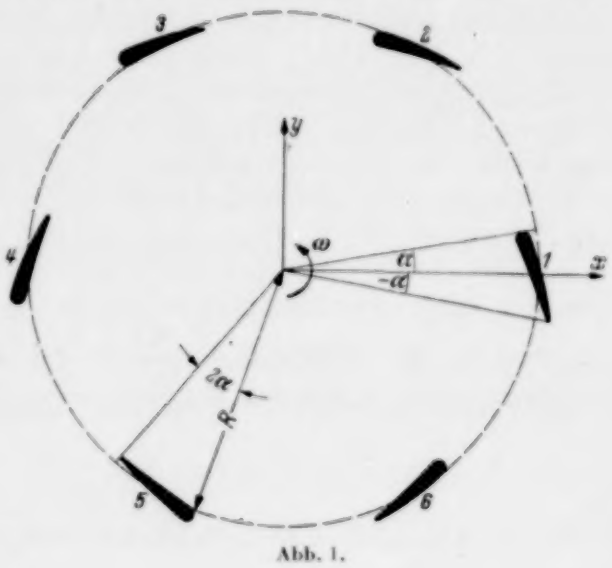


Abb. 1.

Die sechs Konturkurven der Flügelprofile sind dann in der Form

$$\zeta_q = R\,e^{i\left(\psi+\frac{q-1}{3}\pi+\omega t\right)},$$
$$(q=1,\ldots,6;\quad -\alpha\leqq\psi\leqq\alpha)$$

gegeben. Das gilt für jeden beliebigen Zeitpunkt.

Dann ist das von den auf den sechs Propellerflügeln angebrachten Zirkulationsverteilungen $\gamma(\psi,t)$ im Punkte $z = r\,e^{i\varphi}$ induzierte Geschwindigkeitsfeld gegeben durch

$$u_\gamma - i\,v_\gamma = \frac{i}{2\pi}\sum_{q=1}^{6}\int_{-\alpha}^{\alpha}\gamma\left(\psi, t+\frac{q-1}{3}\frac{\pi}{\omega}\right)\frac{R\,d\psi}{r\,e^{i\varphi}-R\,e^{i\left(\psi+\frac{q-1}{3}\pi+\omega t\right)}}. \tag{1}$$

Dabei haben wir sofort berücksichtigt, daß ja, wenn $\gamma_q(\psi,t)$ die Zirkulationsverteilung auf dem q-ten Flügel ist, offenbar gilt

$$\gamma_q(\psi,t) = \gamma_1\left(\psi, t+\frac{q-1}{3}\frac{\pi}{\omega}\right) = \gamma\left(\psi, t+\frac{q-1}{3}\frac{\pi}{\omega}\right).$$

[1] Die Unterscheidung zwischen freien und gebundenen Wirbeln ist hier die aus der instationären Tragflügeltheorie bekannte. Vgl. z. B. *W. Birnbaum*, Z. angew. Math. Mech. 4 (1924) S. 277; u. *W. Schmeidler*, Z. angew. Math. Mech. 19 (1939).

Die Zerlegung von (1) in Real- und Imaginärteil liefert

$$\left.\begin{aligned} u_\gamma(r,\varphi) &= \frac{1}{2\pi}\sum_{q=1}^{6}\int_{-\infty}^{\infty}\gamma\left(\psi, t+\frac{q-1}{3}\frac{\pi}{\omega}\right)\frac{r\sin\varphi - R\sin\left(\psi+\frac{q-1}{3}\pi+\omega t\right)}{R^2+r^2-2rR\cos\left(\varphi-\psi-\frac{q-1}{3}\pi-\omega t\right)}R\,d\psi\,,\\ v_\gamma(r,\varphi) &= \frac{1}{2\pi}\sum_{q=1}^{6}\int_{-\infty}^{\infty}\gamma\left(\psi, t+\frac{q-1}{3}\frac{\pi}{\omega}\right)\frac{R\cos\left(\psi+\frac{q-1}{3}\pi+\omega t\right) - r\cos\varphi}{R^2+r^2-2rR\cos\left(\varphi-\psi-\frac{q-1}{3}\pi-\omega t\right)}R\,d\psi\,. \end{aligned}\right\} \quad (2)$$

3. Das Geschwindigkeitsfeld der freien Wirbel. Wir betrachten ein festes an die Stelle ψ eines Propellerflügels gebundenes Wirbelelement $\gamma(\psi,t)$. Durch die zeitliche Änderung von γ löst sich in jedem Moment ein Wirbelelement $-\dot\gamma(\psi,t)\,dt$ ab, das mit der konstanten Geschwindigkeit u_0 in Richtung der positiven x-Achse fortgetragen wird. Das feste Wirbelelement selbst beschreibt mit der Winkelgeschwindigkeit ω eine Kreisbahn. Die Umlaufzeit beträgt $2\pi/\omega$. Zur Zeit t befinde sich unser Wirbelelement $\gamma(\psi,t)$ an der Stelle $\omega t+\psi$ der Kreisbahn. Dann befand sich γ zur Zeit

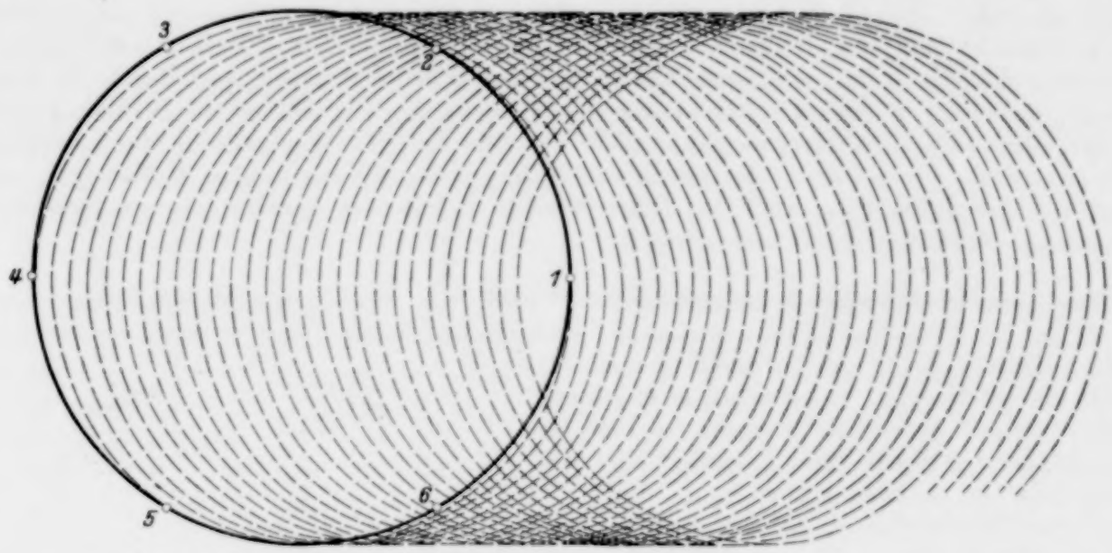


Abb. 2. Abfließende freie Wirbel eines Voith-Schneider-Propellers mit dem Fortschrittsgrad 1/16. (Idealisiert, d. h. ohne Berücksichtigung der gegenseitigen Beeinflussung der freien Wirbel).

$t-\vartheta/\omega$ an der Stelle $\omega t+\psi-\vartheta$ der Kreisbahn. Dort hat sich ein freies Wirbelelement $-\dot\gamma(\psi,t-\vartheta/\omega)\,dt$ von ihm abgelöst, das sich mittlerweile an der Stelle

$$Y = R\sin(\omega t+\psi-\vartheta)\,, \qquad X = R\cos(\omega t+\psi-\vartheta)+u_0\frac{\vartheta}{\omega}$$

befindet. Ein solches freies Wirbelelement induziert an einem beliebigen festen Punkt $z=re^{i\varphi}$ die Geschwindigkeit

$$du_f - i\,dv_f = -\frac{i}{2\pi}\frac{\dot\gamma\left(\psi, t-\frac{\vartheta}{\omega}\right)}{re^{i\varphi}-Re^{i(\omega t+\psi-\vartheta)}-u_0\frac{\vartheta}{\omega}}\frac{d\vartheta}{\omega} \quad \text{mit} \quad dt=\frac{d\vartheta}{\omega}\,.$$

Nun befinden sich als Folge unseres festen Wirbels γ (an der Stelle $\omega t+\psi$) auf der ganzen Bahn bis nach $X\to\infty$, d. h. auch $\vartheta\to\infty$, lauter freie Wirbel, die alle zusammen an der Stelle $z=re^{i\varphi}$ die Geschwindigkeit

$$u_f - i\,v_f = \frac{-i}{2\pi\omega}\int_0^\infty\frac{\dot\gamma\left(\psi, t-\frac{\vartheta}{\omega}\right)d\vartheta}{re^{i\varphi}-Re^{i(\omega t+\psi-\vartheta)}-\frac{u_0}{\omega}\vartheta}$$

induzieren. Alle festen Wirbel der sechs Propellerflügel liefern dann ein abgehendes Wirbelband von freien Wirbeln, das die Geschwindigkeit

$$u_f - i\,v_f = -\frac{i}{2\pi}\frac{R}{\omega}\sum_{q=1}^{6}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{0}^{\infty}\frac{\dot\gamma\left(\psi, t+\frac{q-1}{3}\frac{\pi}{\omega}-\frac{\vartheta}{\omega}\right)d\vartheta\,d\psi}{r\,e^{i\varphi}-R\,e^{i\left(\omega t+\psi+\frac{q-1}{3}\pi-\vartheta\right)}-\frac{u_0}{\omega}\vartheta}$$

induziert. Das ist die strenge Formel, wenn man von der schwer zu erfassenden Zusatzbewegung der freien Wirbel infolge ihrer gegenseitigen Beeinflussung absieht. Es hat sich nun aber gezeigt, daß einer theoretischen Verwendung dieser Formel große Schwierigkeiten entgegenstehen. Diese Schwierigkeiten sind dadurch begründet, daß die Kurven, auf denen sich die abfließenden freien Wirbel bewegen, zykloidenförmig sind. Dieser Umstand macht eine Auswertung der vorkommenden Integrale sehr schwer.

Man kann diese Schwierigkeit umgehen, wenn man sich auf die Behandlung von Propellern mit einem Fortschrittsgrad beschränkt, der kleiner als etwa $^1/_{10}$ ist[1]. (Fortschrittsgrad ist das Verhältnis $u_0/R\,\omega$.) Dann werden nämlich die zykloidenförmigen Kurven, auf denen sich die abfließenden freien Wirbel bewegen, fast Kreise. Man kann dann so tun, als ob sich alle während eines Umlaufes des festen Wirbelelementes $\gamma(\psi,t)$ erzeugten freien Wirbelelemente auf einmal ablösten und zwar zur Zeit t. Dadurch entsteht zur Zeit t eine freie Kreiswirbelverteilung $\dot\gamma(\psi,\vartheta/\omega)\,d\vartheta/\omega$ $(0\leqq\vartheta<2\pi)$.

Von demselben festen Wirbelelement haben sich natürlich auch zu den Zeiten $t-2\pi\,n/\omega$ $(n=1,2,\ldots)$ lauter freie Kreiswirbelverteilungen abgelöst. Diese Wirbelringe können in der hier betrachteten Näherung als nahezu unabhängig von ψ (d. h. von der Kennzeichnung des festen Wirbelelementes im Verband des Propellerflügels) angesehen werden. Denn die Überlagerung aller Wirbel des Propellerflügels bewirkt ja lediglich eine geringfügige Verdickung der freien Wirbelringe, die im Rahmen der hier gemachten Vernachlässigung nicht berücksichtigt zu werden braucht.

Wir vollziehen also den Übergang von $\dot\gamma(\psi,t)$ zu $\dot\Gamma(t)=\int_{-\infty}^{\infty}\dot\gamma(\psi,t)\,d\psi$. (Zu diesen Betrachtungen vgl. Abb. 2.)

Von einem Propellerflügel stammen somit unendlich viele, freie Wirbelringe (Kreiswirbelverteilungen), die sich zu den Zeiten $t-2\pi\,n/\omega$ von dem Propellerflügel abgelöst haben, und die zur Zeit t mit ihren Mittelpunkten an den Stellen $u_0\,2\pi\,n/\omega$ auf der x-Achse $(n=0,1,2,\ldots)$ angelangt sind. (Dabei wird wieder abgesehen von der Zusatzbewegung der freien Wirbel infolge ihrer gegenseitigen Beeinflussung.) Nun haben wir es ja nicht mit einem sondern mit sechs Propellerflügeln zu tun, so daß wir eine dichte Folge von Kreiswirbelverteilungen haben, die zur Zeit t mit ihren Mittelpunkten an den Stellen $u_0\,2\pi\,n/6\,\omega$ $(n=0,1,2,\ldots)$ angekommen sind. Da wir einen Propeller mit kleinem Fortschrittsgrad behandeln, so ist $\Delta x^*=2\pi\,u_0/6\,\omega$ klein. Somit können wir im Rahmen der hier angesetzten Theorie den letzten konsequenten Schritt tun: Wir vollziehen den Grenzübergang $\Delta x^*\to 0$ und betrachten nur noch eine kontinuierliche Folge von abfließenden, freien Kreiswirbelverteilungen der Stärke $-\frac{1}{\omega}\dot\Gamma\left(\frac{\vartheta}{\omega}\right)d\vartheta$ $(0\leqq\vartheta<2\pi)$.

Somit ergibt sich also endgültig das in einem beliebigen Punkt $z=r\,e^{i\varphi}$ von den freien Wirbeln induzierte Geschwindigkeitsfeld zu

$$u_f - i\,v_f = -\frac{i}{2\pi\,\omega}\int_{0}^{\infty}\int_{0}^{2\pi}\frac{\dot\Gamma(\vartheta/\omega)\,d\vartheta\,dx^*}{r\,e^{i\varphi}-R\,e^{i\vartheta}-x^*}\,. \tag{3}$$

Mit dieser Formel werden wir in Zukunft arbeiten. Die Zerlegung von (3) in Real- und Imaginärteil liefert

$$\left.\begin{aligned} u_f(r,\varphi) &= \frac{1}{2\pi\,\omega}\int_{0}^{\infty}\int_{0}^{2\pi}\frac{\dot\Gamma(\vartheta/\omega)\,(R\sin\vartheta - r\sin\varphi)\,d\vartheta\,dx^*}{R^2+r^2+x^{*2}-2\,r\,R\cos(\varphi-\vartheta)-2\,r\,x^*\cos\varphi+2\,R\,x^*\cos\vartheta}\,,\\ v_f(r,\varphi) &= \frac{1}{2\pi\,\omega}\int_{0}^{\infty}\int_{0}^{2\pi}\frac{\dot\Gamma(\vartheta/\omega)\,(r\cos\varphi - R\cos\vartheta - x^*)\,d\vartheta\,dx^*}{R^2+r^2+x^{*2}-2\,r\,R\cos(\varphi-\vartheta)-2\,r\,x^*\cos\varphi+2\,R\,x^*\cos\vartheta}\,. \end{aligned}\right\} \tag{4}$$

[1] Möglicherweise ist die hier entwickelte Methode auch für größere Fortschrittsgrade noch eine brauchbare Näherung. Ich hoffe, darauf in einer späteren Arbeit zurückzukommen.

Zusatz bei der Korrektur: Diese Vermutung bestätigt sich, wie in einer weiteren Arbeit gezeigt werden wird. Dort wird auch Formel (3) noch einmal in einer für beliebige Fortschrittsgrade gültigen Weise begründet werden.

4. Randbedingung und Aufstellung der Integralgleichung. Die Randbedingung für die Strömung an den Propellerflügeln lautet in bezug auf das ruhende Absolutsystem[1]: An jeder Stelle des Flügels soll die Normalkomponente der Absolutgeschwindigkeit übereinstimmen mit der Geschwindigkeit des Flügelelementes normal zu diesem selbst. Es muß somit

$$\omega\, r \cos(\eta - \Phi) = (v_\gamma + v_f)\cos\eta - (u_0 + u_\gamma + u_f)\sin\eta$$

sein längs der Flügelprofilkontur $r(\Phi)$. Dabei ist mit $\Phi = \varphi + \omega t$

$$\operatorname{tg}\eta = \frac{r'(\Phi)\sin\Phi + r(\Phi)\cos\Phi}{r'(\Phi)\cos\Phi - r(\Phi)\sin\Phi}$$

der Anstieg der Profilkontur (Abb. 3).

Wäre die Profilkontur der Propellerflügel genau ein Kreisbogen, so würde $\operatorname{tg}\eta = -\operatorname{ctg}\Phi$ und infolgedessen $\cos(\eta - \Phi) \equiv 0$ sein. Wir dürfen natürlich mit der Vereinfachung nicht so weit gehen; es soll lediglich $r(\varphi, t) = R$ gesetzt werden, aber $r'(\varphi, t)$ ist von Null verschieden. Über $r'(\varphi, t)$ ist noch folgendes zu sagen: Zunächst kann r' als unabhängig von φ angesehen werden ($-\alpha \leqq \varphi \leqq \alpha$; φ ist wie ψ jetzt die Winkelkoordinate zur Bezeichnung der einzelnen Punkte des Propellerflügels). Längs eines Propellerflügels bleibt ja r' praktisch konstant. Dagegen variiert r' während der Umdrehung des Propellerflügels mit der Zeit t, da dieser ja während einer Umdrehung von positiven Anstellwinkeln auf negative und wieder zurück auf positive umgesteuert wird. Auf diese Weise kann je nach der Lage des Anstellwinkels Null ein Schub in einer beliebigen Richtung erzeugt werden, und das ist ja einer der Vorzüge des Voith-Schneider-Propellers. Somit ist

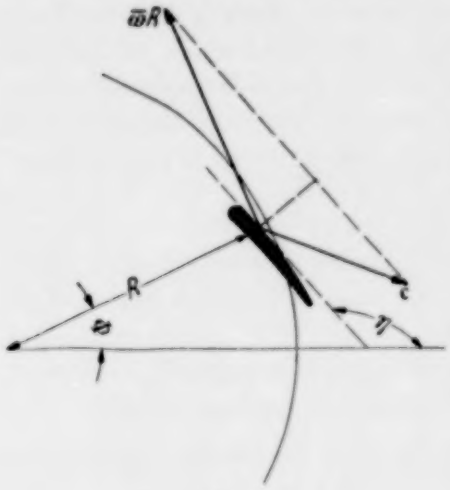


Abb. 3

$$r'_p = -\,r'_0 \cos\left(\omega t + \frac{p-1}{3}\pi + \lambda\right),$$

$$r'_0 = \text{konst.}\quad (p = 1, \ldots 6)\,.$$

Dabei ist für den ersten Propellerflügel $p = 1$, usw. zu setzen und λ wird durch die Lage des Anstellwinkels Null bestimmt; soll dieser z. B. wie in Abb. 1 bei $\omega t = \pi/2$ und bei $\omega t = 3\pi/2$ liegen, so ist $\lambda = 0$ zu setzen. Damit lautet die Randbedingung für die Strömung am Propellerflügel 1

$$\left.\begin{aligned} &-\omega R\, r'_0 \cos(\omega t + \lambda) + u_0 R \cos(\varphi + \omega t) - u_0 r'_0 \cos(\omega t + \lambda)\sin(\varphi + \omega t) = \\ &= -\left[v_f(R, \varphi + \omega t) + v_\gamma(R, \varphi + \omega t)\right]\left[r'_0 \cos(\omega t + \lambda)\cos(\varphi + \omega t) + R\sin(\varphi + \omega t)\right] \\ &\quad + \left[u_f(R, \varphi + \omega t) + u_\gamma(R, \varphi + \omega t)\right]\left[r'_0 \cos(\omega t + \lambda)\sin(\varphi + \omega t) - R\cos(\varphi + \omega t)\right]. \end{aligned}\right\} \tag{5}$$

Gleichung (5) stellt eine Integralgleichung für die Bestimmung der Zirkulationsverteilung $\gamma(\psi, t)$ dar. Sie lautet, wenn wir $u_f, v_f, u_\gamma, v_\gamma$ gemäß (2), (4) einsetzen, zur Abkürzung $\frac{x^*}{R} = \chi$ schreiben und die elementare Zwischenrechnung hier übergehen,

$$\left.\begin{aligned} &\omega r'_0 \cos(\omega t + \lambda) - u_0 \cos(\varphi + \omega t) + u_0 \frac{r'_0}{R}\cos(\omega t + \lambda)\sin(\varphi + \omega t) + \frac{1}{4\pi\omega}\int_0^\infty\int_0^{2\pi} \dot{I}\left(\frac{\vartheta}{\omega}\right) \times \\ &\times \frac{\chi\sin(\varphi+\omega t) + \sin(\varphi+\omega t-\vartheta) + \chi\frac{r'_0}{R}\cos(\omega t+\lambda)\cos(\varphi+\omega t) - \frac{r'_0}{R}\cos(\omega t+\lambda)\left[1-\cos(\varphi+\omega t-\vartheta)\right]}{1 + \frac{1}{2}\chi^2 - \cos(\varphi + \omega t - \vartheta) - \chi\cos(\varphi + \omega t) + \chi\cos\vartheta}\, d\vartheta\, d\chi \\ &+ \frac{1}{4\pi}\frac{r'_0}{R}\cos(\omega t + \lambda)\sum_{q=1}^{6} I\left(t + \frac{q-1}{3}\frac{\pi}{\omega}\right) = \\ &= \frac{1}{4\pi}\sum_{q=1}^{6}\int_{-\infty}^{\infty} \gamma\left(\psi, t + \frac{q-1}{3}\frac{\pi}{\omega}\right)\operatorname{ctg}\frac{1}{2}\left(\varphi - \psi - \frac{q-1}{3}\pi\right) d\psi\,. \end{aligned}\right\} \tag{6}$$

[1] Vgl. *W.-H. Isay*, Ing.-Archiv 22 (1954) S. 203. Dabei sind u und v die x- und y- Komponente der Absolutgeschwindigkeit c.

Gleichung (6) ist die Integralgleichung unseres Problemes; sie gilt für jeden beliebigen Zeitpunkt. Es ist

$$\Gamma(t) = \int_{-\alpha}^{\alpha} \gamma(\psi, t)\, d\psi \qquad \left(-\alpha \leqq \frac{\varphi}{\psi} \leqq \alpha\right).$$

Gleichung (5) war die Randbedingung für den ersten Propellerflügel. Die Randbedingung für den p-ten ($p = 2, \ldots 6$) entsteht aus (5), wenn man dort

$$t \text{ durch } t + \frac{p-1}{3}\frac{\pi}{\omega}$$

ersetzt. Die aus ihr hervorgehende Integralgleichung wird durch die Funktion $\gamma\left(\psi, t + \frac{p-1}{3}\frac{\pi}{\omega}\right)$ gelöst, wie es ja auch sein muß. Deshalb brauchen wir uns um diese weiteren Randbedingungen nicht mehr zu kümmern.

5. Lösung der Integralgleichung. Für die Auflösung der Integralgleichung wollen wir eine Näherungsmethode anwenden, die sich unter den verschiedenen Lösungsmethoden, die der Verfasser geprüft hat, als die einzige für praktische Berechnungen gangbare erwiesen hat. Wir machen den Ansatz

$$\left.\begin{aligned} \gamma(\psi, t) &= \sum_{n=-7}^{7} a_n(\psi)\, e^{in\omega t}, & a_{-n} &= \bar{a}_n, \\ \Gamma(t) &= \sum_{n=-7}^{7} A_n\, e^{in\omega t} & A_{-n} &= \bar{A}_n. \end{aligned}\right\} \tag{7}$$

Wenn man mit dem Ansatz (7) in die Integralgleichung (6) hineingeht, benötigt man, wie leicht ersichtlich, die Kenntnis einiger Integrale, die wir nachfolgend zusammenstellen. Dabei führen wir noch die Abkürzungen

$$\frac{r_0'}{R}\cos(\omega t + \lambda) = h(t), \qquad \omega t + \varphi = \Phi \tag{8}$$

ein. Dann ist

$$\left.\begin{aligned} &\frac{1}{2\pi}\int_0^{\infty}\int_0^{2\pi} e^{in\vartheta}\, \frac{\chi \sin\Phi + \sin(\Phi-\vartheta) + \chi\, h(t)\cos\Phi - h(t)\,[1-\cos(\Phi-\vartheta)]}{1 + \frac{1}{2}\chi^2 - \cos(\Phi-\vartheta) - \chi\cos\Phi + \chi\cos\vartheta}\, d\vartheta\, d\chi = \\ &= \begin{cases} \frac{1}{n}\left(i + h(t)\right) e^{i(n-1)\Phi} & \text{für} \quad \frac{\pi}{2} \leqq \Phi \leqq \frac{3\pi}{2}, \\ \frac{(-1)^n}{n}\left(i - h(t)\right) e^{-i(n-1)\Phi} - \frac{1}{n}\left(i - h(t)\right) e^{i(n+1)\Phi} + \frac{(-1)^n}{n}\left(i + h(t)\right) e^{-i(n+1)\Phi} & \\ \qquad\qquad \text{für} \quad -\frac{\pi}{2} \leqq \Phi \leqq \frac{\pi}{2}, \qquad (n \geq 1) \end{cases} \end{aligned}\right\} \tag{9}$$

und entsprechend ergibt das Integral mit $e^{-in\vartheta}$ den konjugiert komplexen Wert. Aus (9) folgt in elementarer Weise ferner

$$\left.\begin{aligned} &\text{für } n \text{ gerade:} \quad \frac{1}{2\pi}\int_0^{\infty}\int_0^{2\pi} \cos n\vartheta \frac{\cdots}{\cdots}\, d\vartheta\, d\chi = \\ &= \begin{cases} -\frac{1}{n}\sin(n-1)\Phi + \frac{1}{n}\, h(t)\cos(n-1)\Phi & \text{für} \quad \frac{\pi}{2} \leqq \Phi \leqq \frac{3\pi}{2}, \\ \frac{1}{n}\left[\sin(n-1)\Phi + 2\sin(n+1)\Phi\right] - \frac{h(t)}{n}\left[\cos(n-1)\Phi - 2\cos(n+1)\Phi\right] & \\ \qquad\qquad \text{für} \quad -\frac{\pi}{2} \leqq \Phi \leqq \frac{\pi}{2}, \end{cases} \\ &\text{für } n \text{ ungerade:} \quad \frac{1}{2\pi}\int_0^{\infty}\int_0^{2\pi} \cos n\vartheta \frac{\cdots}{\cdots}\, d\vartheta\, d\chi = -\frac{1}{n}\sin(n-1)\Phi + \frac{h(t)}{n}\cos(n-1)\Phi, \end{aligned}\right\} \tag{10}$$

$$\left.\begin{aligned}
&\text{für } n \text{ gerade:} \quad \frac{1}{2\pi}\int_0^{\infty}\int_0^{2\pi} \sin n\vartheta \,\frac{\cdots}{\cdots}\, d\vartheta\, d\chi = \frac{1}{n}\cos(n-1)\Phi + \frac{h(t)}{n}\sin(n-1)\Phi\,,\\
&\text{für } n \text{ ungerade:} \quad \frac{1}{2\pi}\int_0^{\infty}\int_0^{2\pi} \sin n\vartheta \,\frac{\cdots}{\cdots}\, d\vartheta\, d\chi =\\
&= \begin{cases} \dfrac{1}{n}\cos(n-1)\Phi + \dfrac{h(t)}{n}\sin(n-1)\Phi \quad \text{für} \quad \dfrac{\pi}{2} \leqq \Phi \leqq \dfrac{3\pi}{2}\,. \\ -\dfrac{1}{n}[\cos(n-1)\Phi + 2\cos(n+1)\Phi] - \dfrac{h(t)}{n}[\sin(n-1)\Phi - 2\sin(n+1)\Phi] \\ \qquad\qquad\qquad\qquad \text{für} \quad -\dfrac{\pi}{2} \leqq \Phi \leqq \dfrac{\pi}{2}\,. \end{cases}
\end{aligned}\right\} \tag{11}$$

Um den Gedankengang der Auflösung unserer Integralgleichung (6) hier nicht zu unterbrechen, soll der Beweis der Relation (9) in einem besonderen Abschnitt **6** gebracht werden.

Interessant ist, daß diese Integrale, durch die ja im wesentlichen der Einfluß der abfließenden freien Wirbel charakterisiert wird, verschieden sind, je nachdem ob sich der betrachtete Propellerflügel im II. und III. oder I. und IV. Quadranten befindet (Winkelkoordinate Φ). Das liegt natürlich daran, daß im letzteren Fall der Propellerflügel durch die abfließenden freien Wirbel hindurchtritt, im ersteren aber nicht.

Die Integralgleichung (6) gilt nun für alle Zeiten, d. h. für jedes Φ. Zu ihrer Auflösung müssen wir deshalb für das Doppelintegral auf der linken Seite von (6) eine für alle Φ gültige Darstellung suchen. Man könnte zunächst daran denken, für jedes einzelne der Integrale (9) bzw. (10), (11) eine für $0 \leqq \Phi \leqq 2\pi$ gültige *Fourier*entwicklung herzustellen. Es hat sich jedoch gezeigt, daß dieses praktisch nicht durchführbar ist. Denn eine solche *Fourier*entwicklung dürfte, damit der Ansatz (7) zur Lösung der Integralgleichung ausreicht, in keinem Falle höhere Potenzen als $e^{6i\omega t}$ haben. Andererseits tritt z. B. für das Integral in (10) grade auf Grund des Ansatzes (7) für $n = 6$ auf

$$\left.\begin{aligned}
&-\frac{1}{6}\sin 5\Phi \qquad\qquad \text{für} \quad \frac{\pi}{2} \leqq \Phi \leqq \frac{3\pi}{2}\\
&\frac{1}{6}\sin 5\Phi + \frac{1}{3}\sin 7\Phi \quad \text{für} \quad -\frac{\pi}{2} \leqq \Phi \leqq \frac{\pi}{2}\,.
\end{aligned}\right\} \tag{12}$$

Dieser Ausdruck kann aber unmöglich durch eine *Fourier*entwicklung approximiert werden, die nur bis $\sin 6\Phi$ reicht.

Es bleibt also nur die Möglichkeit, das Doppelintegral auf der linken Seite von (6) als ganzes [bei Verwendung des Ansatzes (7)] durch ein *Fourier*polynom zu approximieren. Denn das Doppelintegral als ganzes hat natürlich nicht die hohe Periodizität wie z. B. der Ausdruck (12), so daß man mit einem *Fourier*polynom bis zum sechsten Grade auskommen dürfte. Es hat sich gezeigt, daß dieser Weg zum Erfolg führt. Aber für diese Approximation ist jeweils die Kenntnis der Konstanten A_n aus (7) erforderlich, so daß unsere Methode in der Praxis auf ein Iterationsverfahren hinausläuft.

Der Weg zur Auflösung der Integralgleichung (6) ist also folgender: In erster Näherung wird das Doppelintegral auf der linken Seite von (6) weggelassen und auf diese Weise die erste Näherung $\overset{(1)}{\gamma}(\psi,t)$ bzw. $\overset{(1)}{\Gamma}(t)$ bestimmt, die dann in das Doppelintegral eingesetzt wird; mit dieser linken Seite von (6) wird die zweite Näherung $\overset{(2)}{\gamma}(\psi,t)$ bzw. $\overset{(2)}{\Gamma}(t)$ bestimmt, diese wieder in das Doppelintegral eingesetzt und so weiter. Da die aufzulösenden Integralgleichungen für jede Iteration den gleichen Kern haben, kann das Iterationsverfahren weitgehend schematisiert werden; das ist für die numerische Rechnung angenehm.

Wir wollen nun die Durchführung eines solchen Iterationsschrittes effektiv verfolgen; es sei der m-te Schritt. Durch Einsetzen der $(m-1)$-ten Näherung (7) in das Doppelintegral gewinnen wir unter Verwendung der Formeln (9) bzw. (10), (11) und nach Durchführung einer harmonischen Analyse mit der Schrittweite $\pi/6$ folgende Darstellung:

$$\frac{1}{2\pi\omega}\int_0^{\infty}\int_0^{2\pi} \overset{(m-1)}{\Gamma}\left(\frac{\vartheta}{\omega}\right)\frac{\cdots}{\cdots}\, d\vartheta\, d\chi = \sum_{\mu=-6}^{6} \overset{(m)}{c}_{\mu}\, e^{i\mu\Phi} + h(t)\sum_{\mu=-6}^{6} \overset{(m)}{k}_{\mu}\, e^{i\mu\Phi}\,, \qquad \begin{matrix} |\, c_{-\mu} = \bar{c}_{\mu}\,| \\ |\, k_{-\mu} = \bar{k}_{\mu}\,| \end{matrix}\,. \tag{13}$$

Damit nimmt die Integralgleichung (6), wenn man den Ansatz (7) einsetzt, die Form an

$$\left.\begin{aligned} &2\,\omega\,r_0'\cos(\omega t+\lambda)-2\,u_0\cos(\varphi+\omega t)+2\,u_0\frac{r_0'}{R}\cos(\omega t+\lambda)\sin(\varphi+\omega t)\\ &\quad+\sum_{\mu=-6}^{6}{}'\overset{(m)}{c}_\mu e^{i\mu(\varphi+\omega t)}+\frac{r_0'}{R}\cos(\omega t+\lambda)\sum_{\mu=-6}^{6}{}'\overset{(m)}{k}_\mu e^{i\mu(\varphi+\omega t)}+\frac{6}{2\pi}\frac{r_0'}{R}\cos(\omega t+\lambda)\times\\ &\quad\times\left(\overset{(m)}{A}_0+\overset{(m)}{A}_6\,e^{i6\omega t}+\overset{(m)}{\bar{A}}_6\,e^{-i6\omega t}\right)=\frac{1}{2\pi}\sum_{n=-7}^{7}\int_{-\alpha}^{\alpha}\overset{(m)}{a}_n(\psi)\times\\ &\quad\times\left(\operatorname{ctg}\frac{\varphi-\psi}{2}+e^{i\frac{\pi}{3}n}\operatorname{ctg}\frac{\varphi-\psi-\frac{\pi}{3}}{2}+\cdots+e^{i\frac{5\pi}{3}n}\operatorname{ctg}\frac{\varphi-\psi-\frac{5\pi}{3}}{2}\right)d\psi\cdot e^{in\omega t}. \end{aligned}\right\}\tag{14}$$

Es ist nicht schwer zu zeigen, daß bei unserem Ansatz (7)

$$\sum_{q=1}^{6}{}'\overset{(m)}{I}\left(t+\frac{q-1}{3}\frac{\pi}{\omega}\right)=6\,\overset{(m)}{A}_0+6\,\overset{(m)}{A}_6\,e^{i6\omega t}+6\,\overset{(m)}{\bar{A}}_6\,e^{-i6\omega t}$$

wird. Durch Koeffizientenvergleich der $e^{in\omega t}$ zerfällt (14) in 15 Integralgleichungen, von denen nur 8 wesentlich sind; denn mit $a_n(\psi)$ ist ja zugleich auch $a_{-n}(\psi)=\bar{a}_n(\psi)$ bekannt. Diese Integralgleichungen sind für $n=0,1,2,\ldots,7$ von der Form

$$\left.\begin{aligned} \overset{(m)}{f}_n(\varphi)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\alpha}^{\alpha}\overset{(m)}{a}_n(\psi)&\left(\operatorname{ctg}\frac{\varphi-\psi}{2}+e^{i\frac{\pi}{3}n}\operatorname{ctg}\frac{\varphi-\psi-\frac{\pi}{3}}{2}+e^{i\frac{2\pi}{3}n}\operatorname{ctg}\frac{\varphi-\psi-\frac{2\pi}{3}}{2}\right.\\ &\left.+e^{i\pi n}\operatorname{ctg}\frac{\varphi-\psi-\pi}{2}+e^{-i\frac{2\pi}{3}n}\operatorname{ctg}\frac{\varphi-\psi+\frac{2\pi}{3}}{2}+e^{-i\frac{\pi}{3}n}\operatorname{ctg}\frac{\varphi-\psi+\frac{\pi}{3}}{2}\right)d\psi, \end{aligned}\right\}\tag{15}$$

mit $\overline{f_n(\varphi)}=f_{-n}(\varphi)$:

$$\left.\begin{aligned} \overset{(m)}{f}_0(\varphi)&=u_0\frac{r_0'}{R}\frac{1}{2i}(e^{i\varphi}e^{-i\lambda}-e^{-i\varphi}e^{i\lambda})+\overset{(m)}{c}_0+\frac{r_0'}{2R}\overset{(m)}{k}_1e^{i\varphi}e^{-i\lambda}+\frac{r_0'}{2R}\overset{(m)}{\bar{k}}_1e^{-i\varphi}e^{i\lambda},\\ \overset{(m)}{f}_1(\varphi)&=\omega\,r_0'\,e^{i\lambda}-u_0\,e^{i\varphi}+\overset{(m)}{c}_1e^{i\varphi}+\frac{r_0'}{2R}e^{i\lambda}\overset{(m)}{k}_0+\frac{r_0'}{2R}e^{-i\lambda}\overset{(m)}{k}_2e^{2i\varphi}+\frac{3}{2\pi}\frac{r_0'}{R}e^{i\lambda}\overset{(m)}{A}_0,\\ \overset{(m)}{f}_2(\varphi)&=u_0\frac{r_0'}{R}\frac{1}{2i}e^{i\lambda}e^{i\varphi}+\overset{(m)}{c}_2e^{i2\varphi}+\frac{r_0'}{2R}e^{i\lambda}\overset{(m)}{k}_1e^{i\varphi}+\frac{r_0'}{2R}e^{-i\lambda}\overset{(m)}{k}_3e^{3i\varphi},\\ \overset{(m)}{f}_3(\varphi)&=\overset{(m)}{c}_3e^{3i\varphi}+\frac{r_0'}{2R}e^{i\lambda}\overset{(m)}{k}_2e^{2i\varphi}+\frac{r_0'}{2R}e^{-i\lambda}\overset{(m)}{k}_4e^{4i\varphi},\\ \overset{(m)}{f}_4(\varphi)&=\overset{(m)}{c}_4e^{4i\varphi}+\frac{r_0'}{2R}e^{i\lambda}\overset{(m)}{k}_3e^{3i\varphi}+\frac{r_0'}{2R}e^{-i\lambda}\overset{(m)}{k}_5e^{5i\varphi},\\ \overset{(m)}{f}_5(\varphi)&=\overset{(m)}{c}_5e^{5i\varphi}+\frac{r_0'}{2R}e^{i\lambda}\overset{(m)}{k}_4e^{4i\varphi}+\frac{r_0'}{2R}e^{-i\lambda}\overset{(m)}{k}_6e^{6i\varphi}+\frac{3}{2\pi}\frac{r_0'}{R}\overset{(m)}{A}_6e^{-i\lambda},\\ \overset{(m)}{f}_6(\varphi)&=\overset{(m)}{c}_6e^{6i\varphi}+\frac{r_0'}{2R}e^{i\lambda}\overset{(m)}{k}_5e^{5i\varphi},\\ \overset{(m)}{f}_7(\varphi)&=\frac{r_0'}{2R}e^{i\lambda}\overset{(m)}{k}_6e^{6i\varphi}+\frac{3}{2\pi}\frac{r_0'}{R}\overset{(m)}{A}_6e^{i\lambda}. \end{aligned}\right\}\tag{16}$$

In der Praxis ist $\overset{(m)}{f}_7(\varphi)$ meist schon so klein, daß es nicht mehr berücksichtigt zu werden braucht.

Wir haben nun die Auflösung der Integralgleichungen (15) durchzuführen. Dazu nehmen wir die Transformation

$$\operatorname{tg}\frac{\varphi}{2}=-\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\cos s,\qquad \operatorname{tg}\frac{\psi}{2}=-\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\cos\sigma\qquad\left(0\leqq\frac{s}{\sigma}\leqq\pi\right)\tag{17}$$

vor. Dabei wollen wir festsetzen, daß

$$\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\lessapprox 0{,}1\quad\text{d. h.}\quad\alpha\leqq 12^\circ\tag{18}$$

sei, und zwar grundsätzlich für die ganze hier dargelegte Theorie. Für die Praxis bedeutet das kaum eine Einschränkung, denn ein sechsflügeliger Voith-Schneider-Propeller, dessen Flügel sich je über mehr als 24° erstrecken, dürfte selten vorkommen.

Mit der Transformation (17) werden nun die einzelnen Teile des Kernes von (15) umgerechnet. Dabei ist wegen (18)

$$1 + \operatorname{tg}^2 \frac{\Delta}{2} \approx 1 ,$$

und auch sonst ergeben sich Vereinfachungen durch (18).

Es ist z. B.

$$d\psi = 2 \operatorname{tg} \frac{\Delta}{2} \sin\sigma \, d\sigma ,$$

$$\operatorname{ctg} \frac{\varphi - \psi}{2} = \frac{1}{\operatorname{tg} \frac{\Delta}{2}} \frac{1}{\cos\sigma - \cos s} ,$$

$$\operatorname{ctg} \frac{\varphi - \psi - \frac{2\pi}{3}}{2} = - \frac{1}{\operatorname{tg} \frac{\pi}{3}} \frac{1 + \operatorname{tg} \frac{\pi}{3} \operatorname{tg} \frac{\Delta}{2} (\cos\sigma - \cos s)}{1 - \frac{\operatorname{tg} \frac{\Delta}{2}}{\operatorname{tg} \frac{\pi}{3}} (\cos\sigma - \cos s)} =$$

$$= - \frac{1}{\operatorname{tg} \frac{\pi}{3}} \left\{ 1 + \left(\operatorname{tg} \frac{\pi}{3} \operatorname{tg} \frac{\Delta}{2} + \frac{\operatorname{tg} \frac{\Delta}{2}}{\operatorname{tg} \frac{\pi}{3}} \right) (\cos\sigma - \cos s) + \left[\operatorname{tg}^2 \frac{\Delta}{2} + \left(\frac{\operatorname{tg} \frac{\Delta}{2}}{\operatorname{tg} \frac{\pi}{3}} \right)^2 \right] (\cos\sigma - \cos s)^2 \right\} .$$

Wir wollen diese Transformation auf die neuen Variablen s und σ hier nicht weiter verfolgen, da die Rechnungen durchaus elementar sind. Wegen der Kleinheit von $\operatorname{tg} \frac{\Delta}{2}$ können Nenner in geometrische Reihen entwickelt und mit dem zweiten oder dritten Glied abgebrochen werden. Das Ergebnis ist: Wenn wir noch

$$\overset{(m)}{f_n}(\varphi) = \frac{1}{\sin s} \overset{(m)}{g_n}(s) , \qquad \overset{(m)}{a_n}(\psi) = \frac{1}{\sin\sigma} \overset{(m)}{y_n}(\sigma)$$

setzen, gehen die Integralgleichungen (15) in solche von der Form

$$\overset{(m)}{g_n}(s) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \overset{(m)}{y_n}(\sigma) \left(\frac{\sin s}{\cos\sigma - \cos s} + \sum_{\mu=1}^{N}{}' \sum_{\nu=0}^{N} \overset{(n)}{b}_{\mu\nu} \sin \mu s \cos \nu \sigma \right) d\sigma \tag{19}$$

über, die aus der Theorie der Schaufelgitter wohlbekannt sind[1]. In unserem Falle ist

$$\left.\begin{aligned}
b_{10}^{(n)} &= - 2 i \operatorname{tg} \frac{\Delta}{2} \left(\frac{\sin \frac{\pi}{3} n}{\operatorname{tg} \frac{\pi}{6}} + \frac{\sin \frac{2\pi}{3} n}{\operatorname{tg} \frac{\pi}{3}} \right) - \frac{3}{2} i \operatorname{tg}^3 \frac{\Delta}{2} \left(\frac{\sin \frac{\pi}{3} n}{\operatorname{tg} \frac{\pi}{6} \sin^2 \frac{\pi}{6}} + \frac{\sin \frac{2\pi}{3} n}{\operatorname{tg} \frac{\pi}{3} \sin^2 \frac{\pi}{3}} \right) , \\
b_{20}^{(n)} &= \operatorname{tg}^2 \frac{\Delta}{2} \left(\frac{1}{2} (-1)^n + \frac{\cos \frac{\pi}{3} n}{\sin^2 \frac{\pi}{6}} + \frac{\cos \frac{2\pi}{3} n}{\sin^2 \frac{\pi}{3}} \right) + 2 \operatorname{tg}^4 \frac{\Delta}{2} \frac{\cos \frac{\pi}{3} n}{\operatorname{tg}^2 \frac{\pi}{6} \sin^2 \frac{\pi}{6}} , \\
b_{11}^{(n)} &= - 2 \operatorname{tg}^2 \frac{\Delta}{2} \left(\frac{1}{2} (-1)^n + \frac{\cos \frac{\pi}{3} n}{\sin^2 \frac{\pi}{6}} + \frac{\cos \frac{2\pi}{3} n}{\sin^2 \frac{\pi}{3}} \right) - 3 \operatorname{tg}^4 \frac{\Delta}{2} \frac{\cos \frac{\pi}{3} n}{\operatorname{tg}^2 \frac{\pi}{6} \sin^2 \frac{\pi}{6}} , \\
b_{30}^{(n)} &= - \frac{i}{2} \operatorname{tg}^3 \frac{\Delta}{2} \left(\frac{\sin \frac{\pi}{3} n}{\operatorname{tg} \frac{\pi}{6} \sin^2 \frac{\pi}{6}} + \frac{\sin \frac{2\pi}{3} n}{\operatorname{tg} \frac{\pi}{3} \sin^2 \frac{\pi}{3}} \right) , \qquad b_{31}^{(n)} = - \frac{3}{2} \operatorname{tg}^4 \frac{\Delta}{2} \frac{\cos \frac{\pi}{3} n}{\operatorname{tg}^2 \frac{\pi}{6} \sin^2 \frac{\pi}{6}} , \\
b_{21}^{(n)} &= 2 i \operatorname{tg}^3 \frac{\Delta}{2} \left(\frac{\sin \frac{\pi}{3} n}{\operatorname{tg} \frac{\pi}{6} \sin^2 \frac{\pi}{6}} + \frac{\sin \frac{2\pi}{3} n}{\operatorname{tg} \frac{\pi}{3} \sin^2 \frac{\pi}{3}} \right) , \qquad b_{13}^{(n)} = - \frac{1}{2} \operatorname{tg}^4 \frac{\Delta}{2} \frac{\cos \frac{\pi}{3} n}{\operatorname{tg}^2 \frac{\pi}{6} \sin^2 \frac{\pi}{6}} , \\
b_{12}^{(n)} &= - i \operatorname{tg}^3 \frac{\Delta}{2} \left(\frac{\sin \frac{\pi}{3} n}{\operatorname{tg} \frac{\pi}{6} \sin^2 \frac{\pi}{6}} + \frac{\sin \frac{2\pi}{3} n}{\operatorname{tg} \frac{\pi}{3} \sin^2 \frac{\pi}{3}} \right) , \qquad b_{22}^{(n)} = \frac{3}{2} \operatorname{tg}^4 \frac{\Delta}{2} \frac{\cos \frac{\pi}{3} n}{\operatorname{tg}^2 \frac{\pi}{6} \sin^2 \frac{\pi}{6}} .
\end{aligned}\right\} \tag{20}$$

[1] Vgl. *W.-H. Isay*, Z. angew. Math. Mech. 33 (1953) S. 405.

Alle weiteren $b_{\mu\nu}^{(n)}$ sind Null oder vernachlässigbar klein ($< 10^{-3}$). Selbst die Berücksichtigung aller in (20) angeführten $b_{\mu\nu}^{(n)}$ wird in vielen Fällen nicht nötig sein. Die Auflösung von (19) erfolgt nach der Theorie von *Schmeidler* auf dem Wege über die Kernmatrix [1].

Wir wählen die beiden im Bereich $0 \ldots \pi$ vollständigen Orthonormalsysteme

$$\Phi_\varkappa(s) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sin \varkappa s\,, \qquad \Psi_\beta(\sigma) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cos \beta \sigma\,, \qquad \Psi_0 = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \qquad (\beta, \varkappa = 1, 2, \ldots).$$

Wird der Kern von (19) mit $K(s, \sigma)$ bezeichnet, so ergibt sich für die Kernmatrix

$$K_{\varkappa\beta}^{(n)} = \int_0^\pi \int_0^\pi K(s,\sigma)\, \Phi_\varkappa(s)\, \Psi_\beta(\sigma)\, d\sigma\, ds = \delta_{\varkappa\beta} + \frac{1}{2} b_{\varkappa\beta}^{(n)} \qquad (\beta, \varkappa = 1, 2, \ldots)$$

und speziell

$$K_{\varkappa 0}^{(n)} = \frac{1}{\sqrt{2}} b_{\varkappa 0}^{(n)} \qquad (\varkappa = 1, 2, \ldots)\,.$$

Die Auflösung von (19) ist damit auf die Lösung des Gleichungssystems

$$\sum_{\beta=0}^{M} K_{\varkappa\beta}^{(n)} \overset{(m)}{y}_{\beta n} = \overset{(m)}{g}_{\varkappa n} \qquad (\varkappa = 1, \ldots M) \tag{21}$$

zurückgeführt. Die Konstanten $\overset{(m)}{g}_{\varkappa n}$ und $\overset{(m)}{y}_{\beta n}$ stammen aus den Entwicklungen [1]:

$$\overset{(m)}{g}_n(s) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sum_{\varkappa=1}^{M} \overset{(m)}{g}_{\varkappa n} \sin \varkappa s, \qquad \overset{(m)}{y}_n(\sigma) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \overset{(m)}{y}_{0\,n} + \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sum_{\beta=1}^{M} \overset{(m)}{y}_{\beta n} \cos \beta \sigma\,. \tag{22}$$

Die $\overset{(m)}{g}_{\varkappa n}$ sind also bekannt, die $\overset{(m)}{y}_{\beta n}$ sind zu bestimmen.

In unserem Fall der Integralgleichungen (19) hat die Kernmatrix $K_{\varkappa\beta}^{(n)}$ die Form

$$(K_{\varkappa\beta}^{(n)}) = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} b_{10}^{(n)}, & 1 + \frac{1}{2} b_{11}^{(n)}, & \frac{1}{2} b_{12}^{(n)}, & \frac{1}{2} b_{13}^{(n)}, & 0, \ldots \\ \frac{1}{\sqrt{2}} b_{20}^{(n)}, & \frac{1}{2} b_{21}^{(n)}, & 1 + \frac{1}{2} b_{22}^{(n)}, & 0, & 0, \ldots \\ \frac{1}{\sqrt{2}} b_{30}^{(n)}, & \frac{1}{2} b_{31}^{(n)}, & 0, & 1, & 0, \ldots \\ 0, & 0, & 0, & 0, & 1, \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \end{pmatrix}.$$

Die Auflösung des Gleichungssystemes (21) ist somit sehr leicht möglich. Dabei bleibt eine Konstante, $\overset{(m)}{y}_{0\,n}$, frei; sie wird wie bei der Schaufelgitter- oder Tragflügeltheorie durch die Abflußbedingung an der Hinterkante des Propellerflügels festgelegt.

Das Ergebnis der Auflösung von (21) ist für $n = 0, 1, \ldots 7$

$$\left.\begin{aligned} \overset{(m)}{y}_{1\,n} &= \frac{1}{\Delta_n}\left(\overset{(m)}{g}_{1\,n} - \frac{1}{2} b_{12}^{(n)} \overset{(m)}{g}_{2\,n} - \frac{1}{2} b_{13}^{(n)} \overset{(m)}{g}_{3\,n} - \frac{1}{\sqrt{2}} b_{10}^{(n)} \overset{(m)}{y}_{0\,n}\right), \\ \overset{(m)}{y}_{2\,n} &= \overset{(m)}{g}_{2\,n} - \frac{1}{2\,\Delta_n} b_{21}^{(n)} \overset{(m)}{g}_{1\,n} - \frac{1}{\sqrt{2}} \overset{(m)}{y}_{0\,n}\left(b_{20}^{(n)} - \frac{1}{2\,\Delta_n} b_{10}^{(n)} b_{21}^{(n)}\right), \\ \overset{(m)}{y}_{3\,n} &= \overset{(m)}{g}_{3\,n} - \frac{1}{2\,\Delta_n} b_{31}^{(n)} \overset{(m)}{g}_{1\,n} - \frac{1}{\sqrt{2}} \overset{(m)}{y}_{0\,n}\left(b_{30}^{(n)} - \frac{1}{2\,\Delta_n} b_{10}^{(n)} b_{31}^{(n)}\right), \\ \overset{(m)}{y}_{\beta\,n} &= \overset{(m)}{g}_{\beta\,n} \quad \text{für } \beta \geq 4\,. \end{aligned}\right\} \tag{23}$$

Dabei ist

$$\Delta_n = 1 - \operatorname{tg}^2 \frac{\lambda}{2}\left(\frac{1}{2}(-1)^n + \frac{\cos \frac{\pi}{3} n}{\sin^2 \frac{\pi}{6}} + \frac{\cos \frac{2\pi}{3} n}{\sin^2 \frac{\pi}{3}}\right). \tag{24}$$

[1] Die Vertrautheit mit der von *W. Schmeidler* in seinem Buch: Integralgleichungen Bd. I, Leipzig 1950, entwickelten Theorie muß hier vorausgesetzt werden, speziell S. 50 des Buches.

In (23) und (24) sind bereits alle Glieder weggelassen, die wegen (18) so klein sind, daß sie keine Bedeutung haben.

Die Lösung von (19) lautet also

$$\overset{(m)}{y}_n(\sigma) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \overset{(m)}{y}_{0\,n} + \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sum_{\beta=1}^{M} \overset{(m)}{y}_{\beta\,n} \cos \beta\,\sigma \qquad (n = 0, 1, \ldots 7)\,. \tag{25}$$

In den meisten Fällen wird M nicht größer als 3 oder 4 sein. Zur Berechnung der $\overset{(m)}{y}_{\beta\,n}$ benötigt man die Kenntnis der $\overset{(m)}{g}_{\varkappa n}$ aus der Entwicklung (22). Dafür müssen die Funktionen $\overset{(m)}{f}_n(\varphi) = \frac{1}{\sin s} \overset{(m)}{g}_n(s)$ aus (16) auf die Variable s umgerechnet werden. Den Weg dazu deuten wir kurz an: Aus

$$\operatorname{tg} \frac{\varphi}{2} = -\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} \cos s$$

folgt mit der Abkürzung $\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} = \varepsilon$ z. B.

$$e^{i\varphi} = \frac{1 - i\,\varepsilon \cos s}{1 + i\,\varepsilon \cos s} \approx 1 - 2\,i\,\varepsilon \cos s - 2\,\varepsilon^2 \cos^2 s\,.$$

Auf die Wiedergabe der an sich elementaren Umrechnung wird hier verzichtet. Aus der Kleinheit von ε ergeben sich wieder erhebliche Vereinfachungen. Im Endergebnis erhält man folgende für die oben erwähnte Umrechnung wichtige Formeln:

$$\left.\begin{aligned}
e^{i\varphi} \sin s &= \left(1 - \frac{\varepsilon^2}{2}\right) \sin s - i\,\varepsilon \sin 2\,s - \frac{\varepsilon^2}{2} \sin 3\,s\,,\\
e^{2i\varphi} \sin s &= (1 - 2\,\varepsilon^2) \sin s - i\,(2\,\varepsilon - 3\,\varepsilon^3) \sin 2\,s - 2\,\varepsilon^2 \sin 3\,s + \frac{3}{2}\,i\,\varepsilon^3 \sin 4\,s\,,\\
e^{3i\varphi} \sin s &= (1 - 4{,}5\,\varepsilon^2) \sin s - i\,(3\,\varepsilon - 9{,}5\,\varepsilon^3) \sin 2\,s - 4{,}5\,\varepsilon^2 \sin 3\,s + 4{,}75\,i\,\varepsilon^3 \sin 4\,s\,,\\
e^{4i\varphi} \sin s &= (1 - 8\,\varepsilon^2) \sin s - i\,(4\,\varepsilon - 22\,\varepsilon^3) \sin 2\,s - (8\,\varepsilon^2 - 36\,\varepsilon^4) \sin 3\,s\\
&\quad + 11\,i\,\varepsilon^3 \sin 4\,s + 12\,\varepsilon^4 \sin 5\,s\,,\\
e^{5i\varphi} \sin s &= (1 - 12\,\varepsilon^2) \sin s - i\,(5\,\varepsilon - 41\,\varepsilon^3) \sin 2\,s - (12{,}5\,\varepsilon^2 - 84{,}4\,\varepsilon^4) \sin 3\,s\\
&\quad + i\,(21{,}25\,\varepsilon^3 - 125{,}25\,\varepsilon^5) \sin 4\,s + 28{,}1\,\varepsilon^4 \sin 5\,s - 31{,}3\,i\,\varepsilon^5 \sin 6\,s\,,\\
e^{6i\varphi} \sin s &= (1 - 18\,\varepsilon^2 + 114\,\varepsilon^4) \sin s - i\,(6\,\varepsilon - 70\,\varepsilon^3) \sin 2\,s - (18\,\varepsilon^2 - 171\,\varepsilon^4) \sin 3\,s\\
&\quad + i\,(36{,}5\,\varepsilon^3 - 295{,}5\,\varepsilon^5) \sin 4\,s + 57\,\varepsilon^4 \sin 5\,s - 73{,}9\,i\,\varepsilon^5 \sin 6\,s\,.
\end{aligned}\right\} \tag{26}$$

Die Konstanten $\overset{(m)}{y}_{0\,n}$ in (25) werden, wie schon gesagt, aus der Abflußbedingung bestimmt. Diese lautet

$$\gamma(-\alpha, t) \equiv 0\,, \quad \text{d. h. also } a_n(-\alpha) = 0\,, \quad \text{bzw. } \overset{(m)}{y}_n(0) = 0\,.$$

Unter Berücksichtigung von (23) ergibt sich dann

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \overset{(m)}{y}_{0\,n} = \frac{\frac{1}{\Delta_n}\left(1 - \frac{1}{2}\,b_{21}^{(n)}\right) \overset{(m)}{g}_{1\,n} + \left(1 - \frac{1}{2\,\Delta_n}\,b_{12}^{(n)}\right) \overset{(m)}{g}_{2\,n} + \sum_{\beta=3}^{M}{}' \overset{(m)}{g}_{\beta\,n}}{1 - \frac{1}{\Delta_n}\left(1 - \frac{1}{2}\,b_{21}^{(n)}\right) b_{10}^{(n)} - b_{20}^{(n)} - b_{30}^{(n)}}\,.$$

Nun ist

$$\overset{(m)}{A}_n = \int_{\alpha}^{\alpha} \overset{(m)}{a}_n(\psi)\,d\psi = 2 \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} \int_{0}^{\pi} \overset{(m)}{y}_n(\sigma)\,d\sigma = 2\sqrt{\pi} \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} \overset{(m)}{y}_{0\,n}\,,$$

und somit erhalten wir die wichtige Formel

$$\overset{(m)}{A}_n = -2\sqrt{2\pi}\, \frac{\frac{1}{\Delta_n}\left(1 - \frac{1}{2}\,b_{21}^{(n)}\right) \overset{(m)}{g}_{1\,n} + \left(1 - \frac{1}{2\,\Delta_n}\,b_{12}^{(n)}\right) \overset{(m)}{g}_{2\,n} + \sum_{\beta=3}^{M}{}' \overset{(m)}{g}_{\beta\,n}}{1 - \frac{1}{\Delta_n}\left(1 - \frac{1}{2}\,b_{21}^{(n)}\right) b_{10}^{(n)} - b_{20}^{(n)} - b_{30}^{(n)}} \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} \quad (n = 0, 1, \ldots 7)\,. \tag{27}$$

Aus (25) erhält man dann

$$\overset{(m)}{a}_n(\psi) = \frac{1}{\sin \sigma} \overset{(m)}{y}_n(\sigma)$$

durch Rücktransformation auf die Variable ψ. Wegen (18) kann man dabei ohne Bedenken den Tangens durch den Winkel ersetzen, so daß gilt

$$\cos\sigma \approx -\frac{\psi}{\alpha}, \quad \cos 2\sigma \approx 2\frac{\psi^2}{\alpha^2} - 1, \quad \cos 3\sigma \approx 3\frac{\psi}{\alpha} - 4\frac{\psi^3}{\alpha^3} \quad \text{usw.} \tag{28}$$

Damit sind die Integralgleichungen (15) gelöst, und $\overset{(m)}{\gamma}(\psi,t)$ sowie $\overset{(m)}{\Gamma}(t)$ sind berechnet.

Bei der effektiven Durchführung des Iterationsverfahrens zur Auflösung der ursprünglichen Integralgleichung (6) ergibt sich noch folgende Erleichterung: Bis zum vorletzten Iterationsschritt einschließlich braucht man nur jeweils aus Formel (27) $\overset{(m)}{A}_n$ berechnen, während auf die Bestimmung der $\overset{(m)}{a}_n(\psi)$ verzichtet werden kann; denn für die Durchführung des Iterationsverfahrens selbst braucht man ja nur $\overset{(m)}{\Gamma}(t)$, nicht aber $\overset{(m)}{\gamma}(\psi,t)$. Erst beim letzten Schritt muß alles berechnet werden.

Im konkreten Zahlenbeispiel berechnet man zunächst die bei jedem Iterationsschritt gleichbleibenden Größen $b^{(n)}_{\mu\nu}$.

Das Iterationsverfahren kann dann in folgender Weise schematisiert werden: Es sei bekannt die linke Seite der Integralgleichung (6) in der Form (14) durch Einsetzen der $(m-1)$-ten Näherung $\overset{(m-1)}{\Gamma}(t)$ in das Doppelintegral. Dann sind auch die Funktionen $\overset{(m)}{f}_n(\varphi)$ nach (16) bekannt. Diese werden darauf mit Hilfe der Formeln (26) auf die Variable s umgerechnet, d. h. es werden die Funktionen $\overset{(m)}{g}_n(s)$ gebildet; danach kann man unmittelbar die Konstanten $\overset{(m)}{g}_{n\,\varkappa}$ ablesen. Diese werden in (27) eingesetzt; damit ist $\overset{(m)}{\Gamma}(t)$ bestimmt. Die Ableitung $\overset{(m)}{\Gamma}'(t)$ wird dann in das Doppelintegral auf der linken Seite von (6) eingesetzt und dieses mit Hilfe von (9) bzw. (10), (11) ausgewertet. Schließlich wird durch eine harmonische Analyse mit der Schrittweite $\pi/6$ eine für $0 \leqq \Phi \leqq 2\pi$ gültige Darstellung (13) des Doppelintegrals hergestellt. Und darauf kann der nächste Iterationsschritt beginnen.

Die Konvergenz des Iterationsverfahrens hängt von der Größe $\operatorname{tg}\frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$ ab. Dieses kann man leicht erkennen, wenn man etwa die Differenz $\left(\overset{(m)}{A}_n - \overset{(m-1)}{A}_n\right)$ nach der Formel (27) und unter Benutzung von (16) und (26) bildet. Man erhält dann etwa einen Ausdruck der Form

$$\left(\overset{(m)}{A}_n - \overset{(m-1)}{A}_n\right) = -\varepsilon\, G_n(\varepsilon)\left(\overset{(m)}{c}_n - \overset{(m-1)}{c}_n\right) - \varepsilon\frac{r_0'}{2R}G^{*}_{n-1}(\varepsilon)\left(\overset{(m)}{k}_{n-1} - \overset{(m-1)}{k}_{n-1}\right) - \varepsilon\frac{r_0'}{2R}G^{**}_{n+1}(\varepsilon)\left(\overset{(m)}{k}_{n+1} - \overset{(m-1)}{k}_{n+1}\right).$$

Dabei sind G_n, G^{*}_n, G^{**}_n für jeden Iterationsschritt gleich. Da $r_0'/2R$ klein (etwa 1/8 bis 1/4) ist, spielen der zweite und dritte Summand für die Konvergenz nur eine geringe Rolle, wie sich auch bei numerischen Berechnungen gezeigt hat.

Unschwer kann man nun die $\overset{(m)}{c}_n$ bzw. $\overset{(m)}{k}_n$ nach (13) und mit Hilfe der Relation (9) wieder mit den $\overset{(m-1)}{A}_n$ des vorigen Iterationsschrittes in Verbindung bringen, und auf diese Weise eine Abschätzungsformel für den Konvergenzbereich $\varepsilon < \varepsilon_0$ gewinnen. Auf die Wiedergabe dieser Untersuchung wird verzichtet, denn bei der Abschätzung der recht umfangreichen und umständlichen Ausdrücke ist es unvermeidlich, daß der Konvergenzbereich ε_0 kleiner herauskommt als er in Wahrheit ist. An unserem ausführlich behandelten Beispiel werden wir sehen, daß für $\varepsilon = 0{,}0875$ das Iterationsverfahren ohne weiteres konvergiert; bei Proberechnungen zeigte sich, daß auch für $\varepsilon = 0{,}1$ noch eine wenn auch langsamere Konvergenz vorliegt. Somit kann im Rahmen der für die ganze Theorie geltenden Einschränkung (18) die Konvergenz des Iterationsverfahrens als gesichert angesehen werden.

6. Der Beweis für die Integralformel (9). Um den Gedankengang der Auflösung von (6) nicht zu unterbrechen, hatten wir die Integralformel (9) ohne Beweis mitgeteilt. Dieser soll nun nachgeholt werden. Wir führen zunächst die Integration über ϑ aus und setzen zur Abkürzung

$$J_n = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{in\vartheta}\frac{\cdots}{\cdots}\,d\vartheta \qquad (n \geq 1).$$

Durch die Transformation $e^{i\vartheta} = z$, $d\vartheta = dz/iz$ geht J_n über in

$$J_n = \frac{1}{2\pi}\oint_{(EK)} z^{n-1}\,\frac{z^2 e^{-i\Phi} - 2i\chi z\sin\Phi - e^{i\Phi} - ih(t)\left[z^2 e^{-i\Phi} + 2\chi z\cos\Phi - 2z + e^{i\Phi}\right]}{(\chi - e^{-i\Phi})\,(z - e^{i\Phi} + \chi)\left(z - \dfrac{1}{e^{-i\Phi} - \chi}\right)}\,dz.$$

Der Integrationsweg ist der Einheitskreis der z-Ebene. In dieser Form kann J_n leicht nach der Residuenmethode ausgewertet werden. Dabei sind zwei Fälle zu unterscheiden:

1) Es liegt $z_1 = 1/(e^{-i\Phi} - \chi)$ im Einheitskreis; dann liegt $z_2 = e^{i\Phi} - \chi$ nicht im Einheitskreis, und es ergibt sich

$$J_n = -\left(i + h(t)\right) e^{-i\Phi} \frac{1}{(e^{-i\Phi} - \chi)^{n+1}} .$$

2) Es liegt $z_2 = e^{i\Phi} - \chi$ im Einheitskreis; dann liegt $z_1 = 1/(e^{-i\Phi} - \chi)$ nicht im Einheitskreis, und es ergibt sich

$$J_n = -\left(i - h(t)\right) e^{i\Phi} (e^{i\Phi} - \chi)^{n-1} .$$

Der Grenzfall $|z_1| = |z_2| = 1$ bedeutet

$$1 + \chi^2 - 2\,\chi \cos\Phi = 1 ,$$

d. h. $\chi = 0$ oder $\chi = 2\cos\Phi$. Dann ergibt sich J_n als arithmetisches Mittel der beiden unter 1) und 2) gefundenen Ergebnisse, was man auch durch direkte Integration für $\chi = 0$ und $\chi = 2\cos\Phi$ bestätigt.

Für die nun noch folgende Integration über χ sind zwei Fälle zu unterscheiden:

1) Es ist $\cos\Phi$ negativ, d. h. $\pi/2 < \Phi < 3\pi/2$, dann ist für $0 < \chi < \infty$ immer $|z_2| > 1$, und es wird

$$\int_0^\infty J_n\, d\chi = -\left(i + h(t)\right) e^{-i\Phi} \int_0^\infty \frac{d\chi}{(e^{-i\Phi} - \chi)^{n+1}} = \frac{1}{n}\left(i + h(t)\right) e^{i(n-1)\Phi} \qquad (n \geq 1) .$$

2. Es ist $\cos\Phi$ positiv, d. h. $-\pi/2 < \Phi < \pi/2$, dann ist für $0 < \chi < 2\cos\Phi$ $|z_2| < 1$, und es wird somit

$$\int_0^\infty J_n\, d\chi = -\left(i - h(t)\right) e^{i\Phi} \int_0^{2\cos\Phi} (e^{i\Phi} - \chi)^{n-1}\, d\chi - \left(i + h(t)\right) e^{-i\Phi} \int_{2\cos\Phi}^\infty \frac{d\chi}{(e^{-i\Phi} - \chi)^{n+1}}$$

$$= \frac{(-1)^n}{n}\left(i - h(t)\right) e^{-i(n-1)\Phi} - \frac{1}{n}\left(i - h(t)\right) e^{i(n+1)\Phi} + \frac{(-1)^n}{n}\left(i + h(t)\right) e^{-i(n+1)\Phi} \qquad (n \geq 1) .$$

Für $\Phi = \pi/2$ und $\Phi = 3\pi/2$ stimmen beide Werte überein. Damit ist Formel (9) bewiesen.

An dieser Stelle mögen noch zwei weitere Integralformeln angegeben werden, die mit (9) in einem gewissen Zusammenhang stehen, und deren Beweis ganz analog verläuft, so daß wir ihn hier nicht wiedergeben brauchen. Es ist für $n \geq 1$

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^\infty \int_0^{2\pi} \frac{e^{in\vartheta}\,(\sin\vartheta - \sin\Phi)\, d\vartheta\, d\chi}{1 + \frac{1}{2}\chi^2 - \cos(\Phi - \vartheta) - \chi\cos\Phi + \chi\cos\vartheta} =$$

$$= \begin{cases} -\dfrac{i}{n} e^{in\Phi} & \text{für} \quad \dfrac{\pi}{2} \leqq \Phi \leqq \dfrac{3\pi}{2} , \\ \dfrac{i}{n} e^{in\Phi} - \dfrac{2i}{n}(-1)^n\, e^{-in\Phi} & \text{für} \quad -\dfrac{\pi}{2} \leqq \Phi \leqq \dfrac{\pi}{2} \end{cases} \tag{29}$$

und

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^\infty \int_0^{2\pi} \frac{e^{in\vartheta}\,(\cos\Phi - \cos\vartheta - \chi)\, d\vartheta\, d\chi}{1 + \frac{1}{2}\chi^2 - \cos(\Phi - \vartheta) - \chi\cos\Phi + \chi\cos\vartheta} = -\frac{1}{n} e^{in\Phi} \quad \text{für} \quad 0 \leqq \Phi \leqq 2\pi . \tag{30}$$

Aus (29) und (30) folgt ohne weiteres

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^\infty \int_0^{2\pi} \frac{\cos n\vartheta\,(\sin\vartheta - \sin\Phi)\, d\vartheta\, d\chi}{1 + \frac{1}{2}\chi^2 - \cos(\Phi - \vartheta) - \chi\cos\Phi + \chi\cos\vartheta} =$$

$$= \begin{cases} \dfrac{1}{n}\sin n\Phi & \text{für} \quad \dfrac{\pi}{2} \leqq \Phi \leqq \dfrac{3\pi}{2} , \\ -\dfrac{1}{n}\sin n\Phi - \dfrac{2}{n}(-1)^n \sin n\Phi & \text{für} \quad -\dfrac{\pi}{2} \leqq \Phi \leqq \dfrac{\pi}{2} , \end{cases} \tag{31}$$

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{\infty}\int_0^{2\pi}\frac{\sin n\,\vartheta\,(\sin\vartheta-\sin\Phi)\,d\vartheta\,d\chi}{1+\frac{1}{2}\chi^2-\cos(\Phi-\vartheta)-\chi\cos\Phi+\chi\cos\vartheta}$$

$$=\begin{cases}-\frac{1}{n}\cos n\,\Phi & \text{für} \quad \frac{\pi}{2}\leqq\Phi\leqq\frac{3\pi}{2},\\ \frac{1}{n}\cos n\,\Phi-\frac{2}{n}(-1)^n\cos n\,\Phi & \text{für} \quad -\frac{\pi}{2}\leqq\Phi\leqq\frac{\pi}{2},\end{cases} \tag{32}$$

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{\infty}\int_0^{2\pi}\frac{\cos n\,\vartheta\,(\cos\Phi-\cos\vartheta-\chi)\,d\vartheta\,d\chi}{1+\frac{1}{2}\chi^2-\cos(\Phi-\vartheta)-\chi\cos\Phi+\chi\cos\vartheta}=-\frac{1}{n}\cos n\Phi \quad \text{für} \quad 0\leqq\Phi\leqq 2\pi\,, \tag{33}$$

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{\infty}\int_0^{2\pi}\frac{\sin n\,\vartheta\,(\cos\Phi-\cos\vartheta-\chi)\,d\vartheta\,d\chi}{1+\frac{1}{2}\chi^2-\cos(\Phi-\vartheta)-\chi\cos\Phi+\chi\cos\vartheta}=-\frac{1}{n}\sin n\Phi \quad \text{für} \quad 0\leqq\Phi\leqq 2\pi\,. \tag{34}$$

Diese Formeln werden benötigt, wenn man die Geschwindigkeiten berechnen will, die von den abfließenden freien Wirbeln am Ort der Propellerflügel induziert werden [Vgl. (4)].

7. Zahlenbeispiel zur Berechnung der Zirkulationsverteilung. Wir wollen nun das Iterationsverfahren zur Auflösung der Integralgleichung (6) an einem Zahlenbeispiel durchführen.

Dabei wollen wir annehmen, daß der Anstellwinkel Null der Propellerflügel wie in Abb. 1 bei $\pi/2$ und $3\pi/2$ liege. Dann ist ja $\lambda=0$. Die Flügel des Propellers mögen sich über 20° erstrecken; also ist $\alpha=10°$ und $\operatorname{tg}\alpha/2=0{,}0875$. Der Fortschrittsgrad unseres Propellers sei $u_0/R\omega=1/16$. Schließ'ich sei $r_0'/R=0{,}25$. Dann ist der maximale Anstellwinkel der Propellerflügel gegen die Kreisbahn gleich 14°. Für die Rechnung ist es dann noch zweckmäßig, sich überall γ durch γ/u_0 ersetzt zu denken und dafür wieder γ zu schreiben; d. h. mit anderen Worten γ in Einheiten von u_0 zu berechnen. Man hat so reine Zahlen und muß sich den Faktor u_0 jedesmal dazu denken.

Mit den angenommenen Werten berechnen wir nach (20) und (24)

$$\left.\begin{aligned}
&b_{10}^{(1)}=-b_{10}^{(5)}=-0{,}357\,i\,, \quad b_{10}^{(2)}=-b_{10}^{(4)}=-0{,}180\,i\,, \quad b_{10}^{(0)}=b_{10}^{(3)}=b_{10}^{(6)}=0\,,\\
&b_{20}^{(1)}=b_{20}^{(5)}=0{,}007\,, \quad b_{20}^{(2)}=b_{20}^{(4)}=-0{,}017\,, \quad b_{20}^{(0)}=b_{20}^{(6)}=0{,}046\,, \quad b_{20}^{(3)}=-0{,}026\,,\\
&b_{30}^{(1)}=-b_{30}^{(5)}=-0{,}002\,i\,, \quad b_{30}^{(2)}=-b_{30}^{(4)}=-0{,}002\,i\,, \quad b_{30}^{(0)}=b_{30}^{(3)}=b_{30}^{(6)}=0\,,\\
&b_{21}^{(n)}=-4\,b_{30}^{(n)}, \qquad\qquad b_{12}^{(n)}=2\,b_{3)}^{(n)},
\end{aligned}\right\} \tag{35}$$

$$\Delta_1=\Delta_5=0{,}994,\ \Delta_2=\Delta_4=1{,}017,\ \Delta_0=\Delta_6=0{,}955,\ \Delta_3=1{,}024\,. \tag{36}$$

Aus (26) erhalten wir

$$\left.\begin{aligned}
e^{i\varphi}\sin s&=0{,}996\sin s-0{,}0875\,i\sin 2s-0{,}004\sin 3s\,,\\
e^{2i\varphi}\sin s&=0{,}985\sin s-0{,}173\,i\sin 2s-0{,}015\sin 3s+0{,}001\,i\sin 4s\,,\\
e^{3i\varphi}\sin s&=0{,}966\sin s-0{,}256\,i\sin 2s-0{,}034\sin 3s+0{,}003\,i\sin 4s\,,\\
e^{4i\varphi}\sin s&=0{,}939\sin s-0{,}335\,i\sin 2s-0{,}059\sin 3s+0{,}007\,i\sin 4s+0{,}001\sin 5s\,,\\
e^{5i\varphi}\sin s&=0{,}908\sin s-0{,}410\,i\sin 2s-0{,}091\sin 3s+0{,}014\,i\sin 4s+0{,}002\sin 5s\,,\\
e^{6i\varphi}\sin s&=0{,}869\sin s-0{,}478\,i\sin 2s-0{,}128\sin 3s+0{,}023\,i\sin 4s+0{,}003\sin 5s\,.
\end{aligned}\right\} \tag{37}$$

Die Durchführung des Iterationsverfahrens erfolgte genau in der angegebenen Weise (vgl. S. 389). Das Ergebnis der ersten 6 Iterationsschritte für die Zirkulationsverteilung $\overset{(m)}{\Gamma}(t)$ $(m=1,\ldots 6)$ sowie für die Funktionen

$$\sum_{\mu=-6}^{6}\overset{(m+1)}{c}_{\mu}\,e^{i\mu\Phi}, \qquad \sum_{\mu=-6}^{6}\overset{(m+1)}{k}_{\mu}\,e^{i\mu\Phi} \qquad \left(\overset{(1)}{k}_{\mu}=\overset{(1)}{c}_{\mu}\equiv 0\right)$$

aus (13) sind in Abb. 4, 5 und 6 graphisch dargestellt. Die neben den Kurven befindliche Zahl gibt die Nummer der Näherung an. Man sieht deutlich, wie das Verfahren konvergiert. Um das Verfahren etwas abzukürzen[1] haben wir als Ausgangspunkt für die 7. Iteration

[1] In der Praxis kann man das Iterationsverfahren wesentlich abkürzen, indem man von vorne herein solche Mittelwerte bildet und das Verfahren gleich mit einer geschickten Schätzung beginnt.

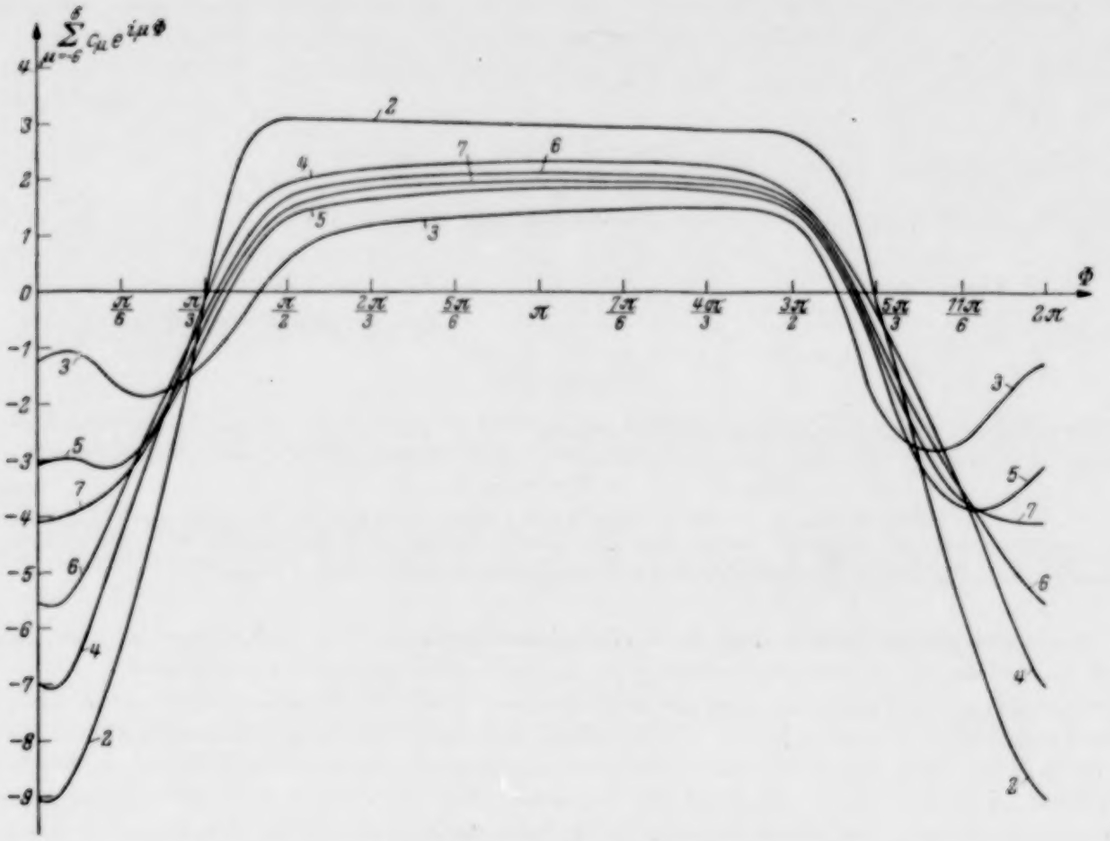

$\sum_{\mu=-6}^{6} c_\mu e^{i\mu\Phi}$
Φ
$\frac{\pi}{6}$ $\frac{\pi}{3}$ $\frac{\pi}{2}$ $\frac{2\pi}{3}$ $\frac{5\pi}{6}$ π $\frac{7\pi}{6}$ $\frac{4\pi}{3}$ $\frac{3\pi}{2}$ $\frac{5\pi}{3}$ $\frac{11\pi}{6}$ 2π

Abb. 4. Die ersten sechs Näherungen der Funktion $\Sigma c_\mu e^{i\mu\Phi}$ beim Iterationsverfahren.

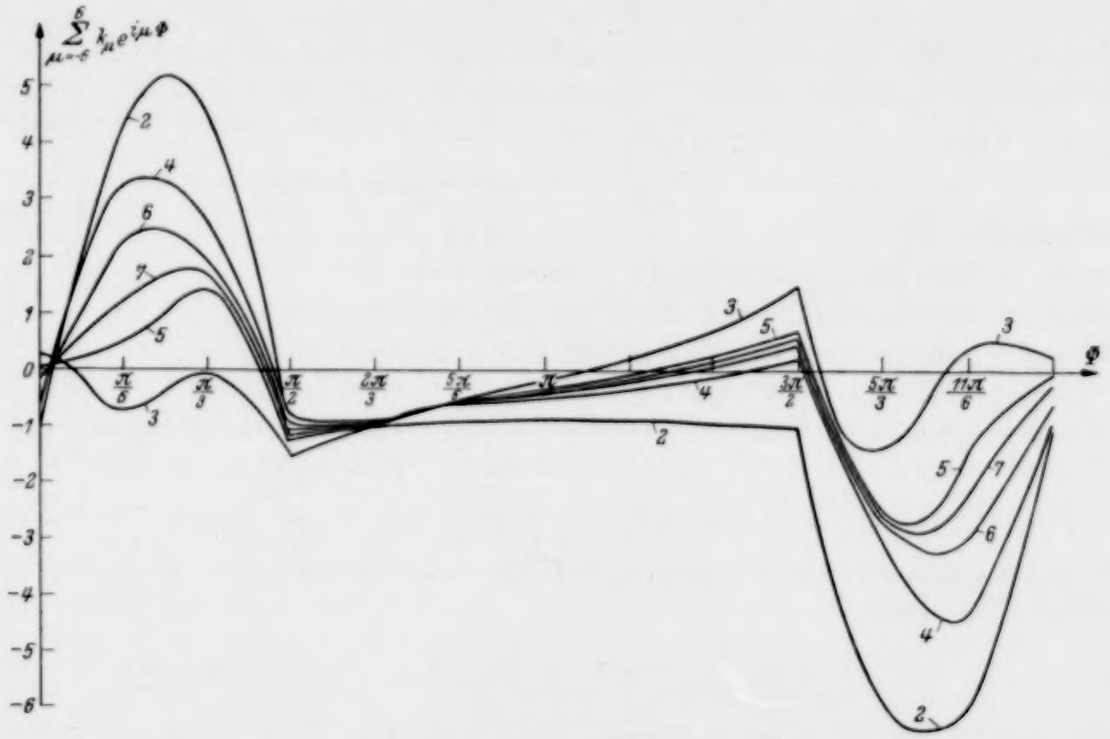


Abb. 5. Die ersten sechs Näherungen der Funktion $\Sigma k_\mu e^{i\mu\Phi}$ beim Iterationsverfahren.

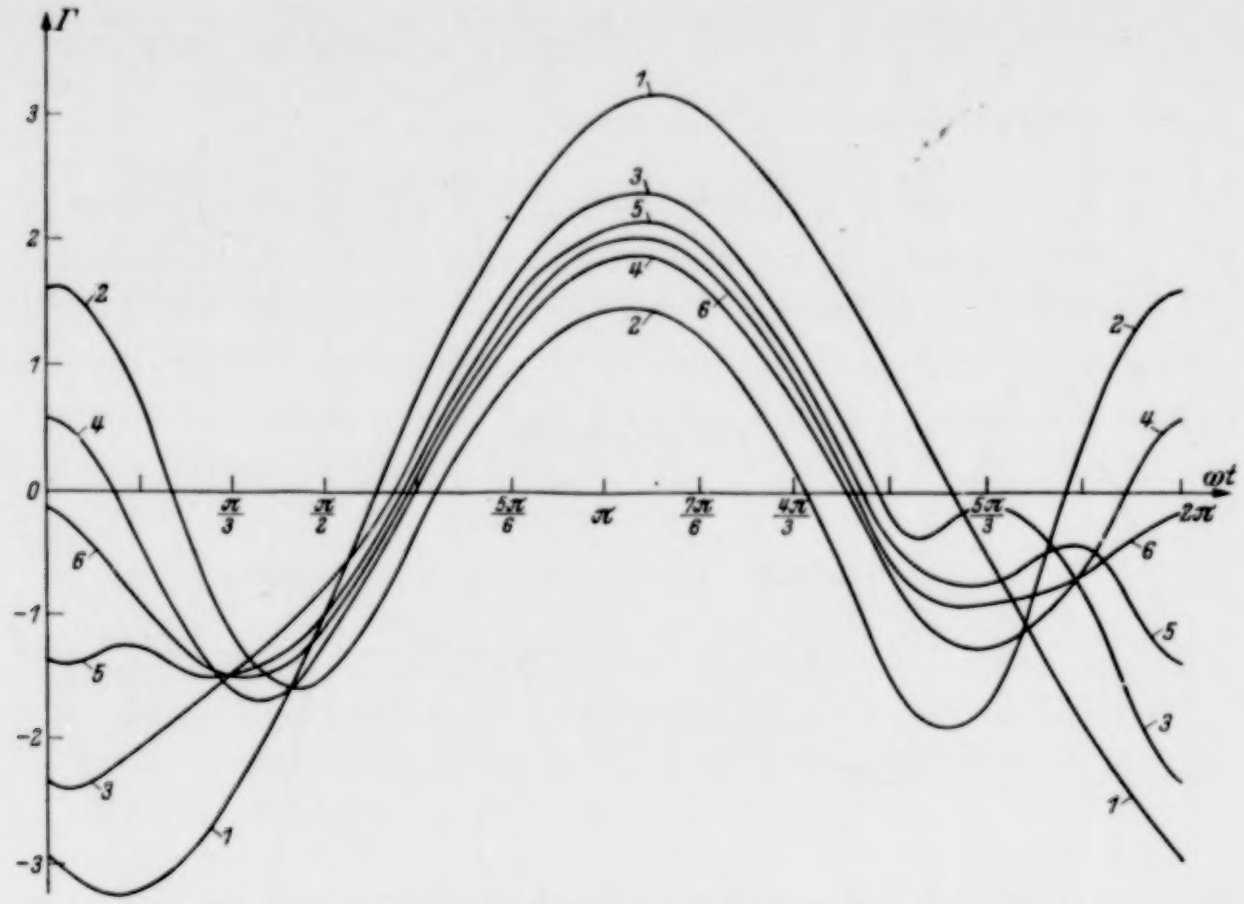


Abb. 6. Die ersten sechs Näherungen der Zirkulationsverteilung Γ beim Iterationsverfahren.

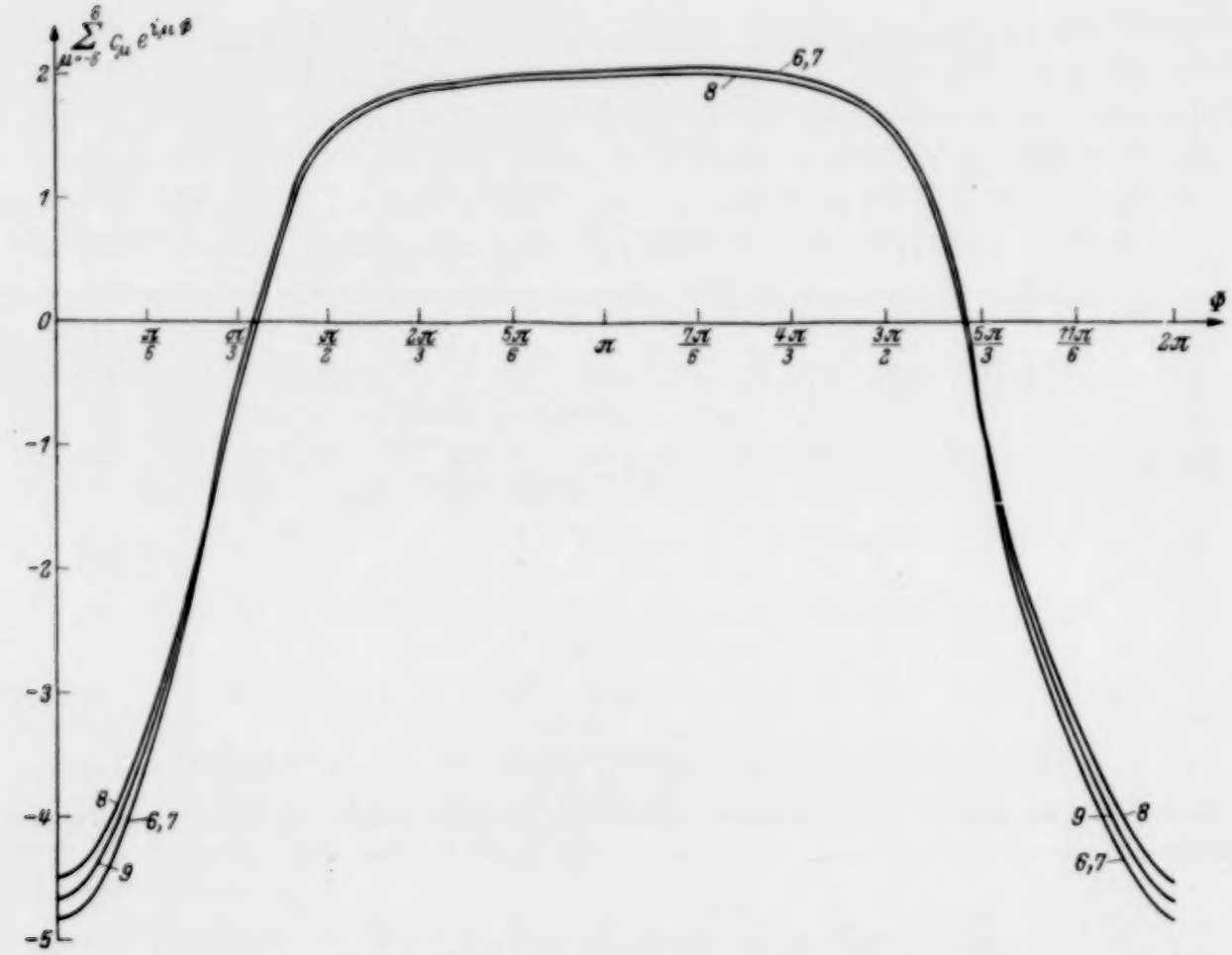


Abb. 7. Die letzten drei Näherungen der Funktion $\Sigma c_\mu e^{i\mu\Phi}$ beim Iterationsverfahren.

nicht (wie eigentlich vorgesehen) die aus der 6. Näherung $\overset{(6)}{\Gamma}(t)$ entstandenen Funktionen $\sum_{\mu=-6}^{6} \overset{(7)}{c}_{\mu} e^{i\mu\Phi}$, $\sum_{\mu=-6}^{6} \overset{(7)}{k}_{\mu} e^{i\mu\Phi}$ gewählt, sondern einen Mittelwert von

$$\sum_{\mu=-6}^{6} \overset{(7)}{c}_{\mu} e^{i\mu\Phi} \quad \text{und} \quad \sum_{\mu=-6}^{6} \overset{(6)}{c}_{\mu} e^{i\mu\Phi} \quad \text{bzw.} \quad \sum_{\mu=-6}^{6} \overset{(7)}{k}_{\mu} e^{i\mu\Phi} \quad \text{und} \quad \sum_{\mu=-6}^{6} \overset{(6)}{k}_{\mu} e^{i\mu\Phi}.$$

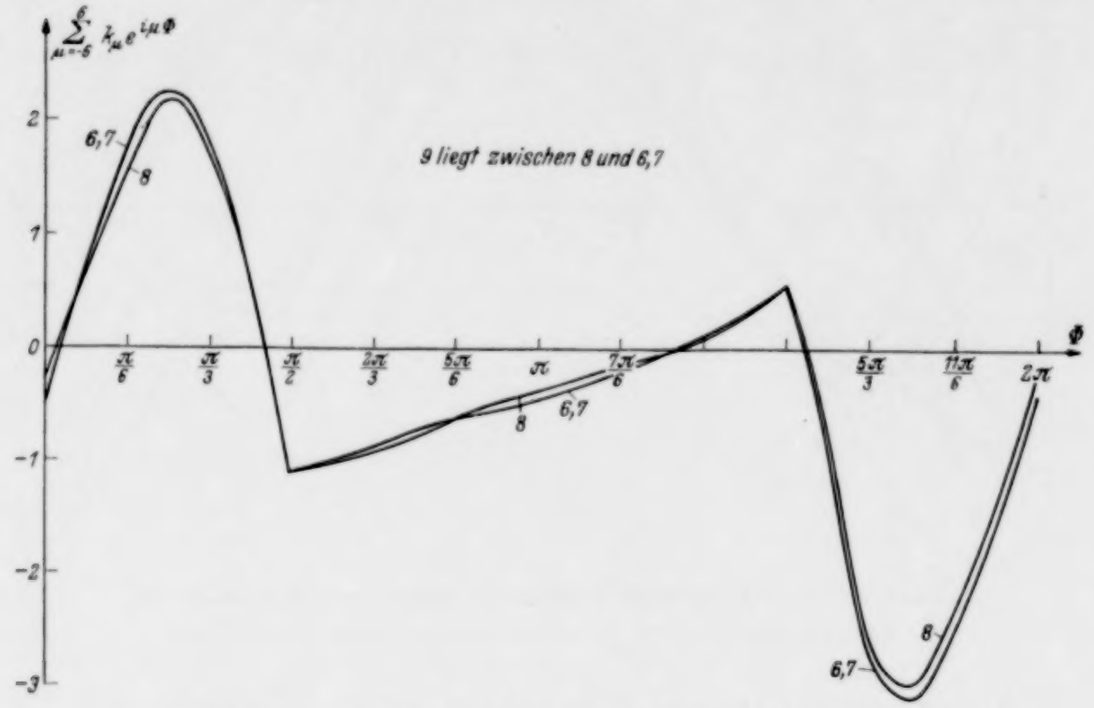


Abb. 8. Die letzten drei Näherungen der Funktion $\Sigma k_\mu e^{i\mu\Phi}$ beim Iterationsverfahren.

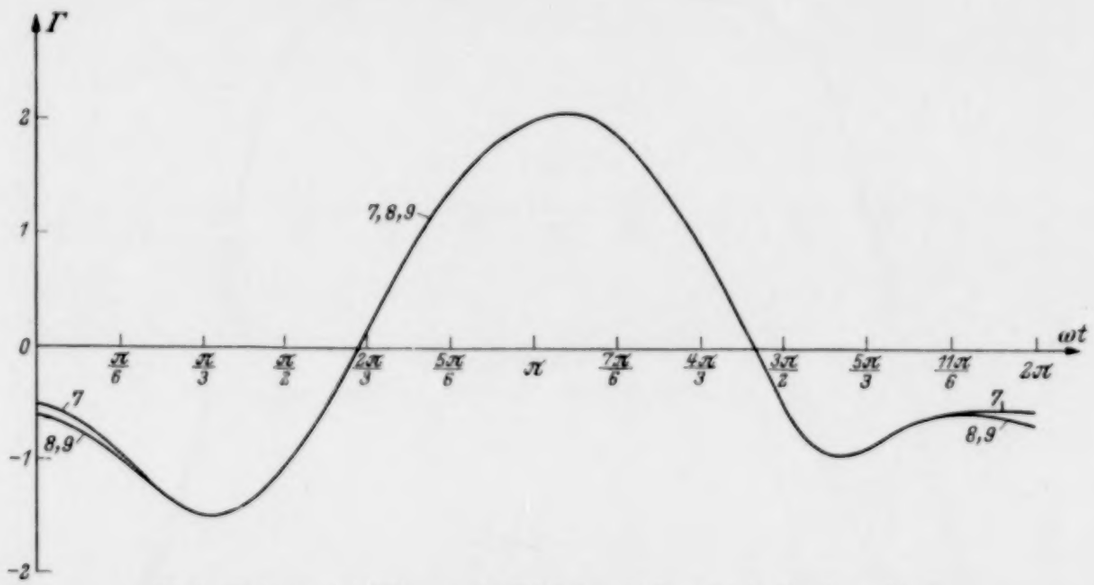


Abb. 9. Die letzten drei Näherungen der Zirkulationsverteilung Γ beim Iterationsverfahren.

(Vgl. Kurve 6,7 in Abb. 7 u. 8). Ebenso wurde als Ausgangspunkt für den 9. Iterationsschritt ein Mittelwert von

$$\sum_{\mu=-6}^{6} \overset{(9)}{c}_{\mu} e^{i\mu\Phi} \quad \text{und} \quad \sum_{\mu=-6}^{6} \overset{(8)}{c}_{\mu} e^{i\mu\Phi} \quad \text{bzw.} \quad \sum_{\mu=-6}^{6} \overset{(9)}{k}_{\mu} e^{i\mu\Phi} \quad \text{und} \quad \sum_{\mu=-6}^{6} \overset{(8)}{k}_{\mu} e^{i\mu\Phi}$$

genommen. Mit der 9. Iteration kann das Verfahren abgebrochen werden, wie sich auch aus Abb. 7, 8 und 9 ergibt. Die sich bei dem 9. Iterationsschritt ergebenden Funktionen stellen wir nachfolgend

ausführlich zusammen. Dabei lassen wir die obere Kennzeichnung (9) weg, da die 9. Näherung als die endgültige Lösung anzusehen ist.

Es wird nach (13)

$$\frac{1}{2\pi\omega}\int_0^{\infty}\int_0^{2\pi} f'\left(\frac{\vartheta}{\omega}\right)\frac{\cdots}{\cdots}\,d\vartheta\,d\chi = \sum_{\mu=-6}^{6} c_\mu\, e^{i\mu\Phi} + h(t)\sum_{\mu=-6}^{6} k_\mu\, e^{i\mu\Phi} =$$

$$= -3{,}122\cos\Phi - 1{,}412\cos 2\Phi - 0{,}232\cos 3\Phi + 0{,}134\cos 4\Phi + 0{,}050\cos 5\Phi$$
$$- 0{,}026\cos 6\Phi + 0{,}072\sin 2\Phi + 0{,}016\sin 3\Phi - 0{,}042\sin 4\Phi - 0{,}046\sin 5\Phi$$
$$+ \frac{1}{4}\cos\omega t\,(-0{,}383 - 0{,}042\cos 2\Phi + 0{,}016\cos 3\Phi + 0{,}046\cos 4\Phi + 0{,}020\cos 5\Phi$$
$$- 0{,}014\cos 6\Phi + 0{,}484\sin\Phi + 1{,}412\sin 2\Phi + 0{,}870\sin 3\Phi - 0{,}134\sin 4\Phi - 0{,}448\sin 5\Phi).$$

Ferner ist nach (16) (alles in Einheiten von u_0)

$$f_0(\varphi) = -0{,}155\,i\,e^{i\varphi} + 0{,}155\,i\,e^{-i\varphi},$$
$$f_1(\varphi) = 3{,}952 + \frac{3}{8\pi}A_0 - 2{,}561\,e^{i\varphi} - (0{,}003 + 0{,}088\,i)\,e^{2i\varphi},$$
$$f_2(\varphi) = -0{,}155\,i\,e^{i\varphi} - (0{,}706 + 0{,}036\,i)\,e^{2i\varphi} + (0{,}001 - 0{,}054\,i)\,e^{3i\varphi},$$
$$f_3(\varphi) = -(0{,}116 + 0{,}008\,i)\,e^{3i\varphi} - (0{,}003 + 0{,}088\,i)\,e^{2i\varphi} + (0{,}003 + 0{,}008\,i)\,e^{4i\varphi},$$
$$f_4(\varphi) = (0{,}067 + 0{,}021\,i)\,e^{4i\varphi} + (0{,}001 - 0{,}054\,i)\,e^{3i\varphi} + (0{,}001 + 0{,}028\,i)\,e^{5i\varphi},$$
$$f_5(\varphi) = (0{,}025 + 0{,}023\,i)\,e^{5i\varphi} + (0{,}003 + 0{,}008\,i)\,e^{4i\varphi} - 0{,}001\,e^{6i\varphi} + \frac{3}{8\pi}A_6,$$
$$f_6(\varphi) = -0{,}013\,e^{6i\varphi} + (0{,}001 + 0{,}028\,i)\,e^{5i\varphi}.$$
$$f_7(\varphi) \approx 0.$$

Die Rechenreihenfolge ist so, daß $f_6(\varphi)$ vor $f_5(\varphi)$ behandelt wird, da ja A_6 bekannt sein muß, bevor $f_5(\varphi)$ weiter behandelt werden kann. Die Umrechnung auf die Variable s mit Hilfe der Formeln (37) ergibt

$$g_0(s) = -0{,}027\sin 2s,$$
$$g_1(s) = (1{,}400 - 0{,}087\,i)\sin s + (-0{,}015 + 0{,}224\,i)\sin 2s + (0{,}010 + 0{,}001\,i)\sin 3s,$$
$$g_2(s) = -(0{,}694 + 0{,}242\,i)\sin s + (-0{,}034 + 0{,}122\,i)\sin 2s + (0{,}011 + 0{,}003\,i)\sin 3s,$$
$$g_3(s) = -(0{,}112 + 0{,}087\,i)\sin s + (-0{,}015 + 0{,}029\,i)\sin 2s + (0{,}004 + 0{,}001\,i)\sin 3s,$$
$$g_4(s) = (0{,}065 - 0{,}007\,i)\sin s + (0{,}005 - 0{,}023\,i)\sin 2s - (0{,}004 + 0{,}002\,i)\sin 3s,$$
$$g_5(s) = (0{,}025 + 0{,}027\,i)\sin s + (0{,}012 - 0{,}011\,i)\sin 2s - (0{,}002 + 0{,}002\,i)\sin 3s,$$
$$g_6(5) = (-0{,}010 + 0{,}025\,i)\sin s + (0{,}011 + 0{,}006\,i)\sin 2s + (0{,}002 - 0{,}003\,i)\sin 3s.$$

Unter Berücksichtigung der Abflußbedingung ergibt sich entsprechend Formel (25)

$$y_0(\sigma) = 0{,}029\,(1 - \cos 2\sigma),$$
$$y_1(\sigma) = -1{,}290 + 0{,}336\,i + (1{,}288 - 0{,}551\,i)\cos\sigma + (-0{,}007 + 0{,}216\,i)\cos 2\sigma + (0{,}009 - 0{,}001\,i)\cos 3\sigma,$$
$$y_2(\sigma) = 0{,}691 - 0{,}013\,i - (0{,}680 + 0{,}116\,i)\cos\sigma + (-0{,}022 + 0{,}125\,i)\cos 2\sigma + (0{,}011 + 0{,}004\,i)\cos 3\sigma,$$
$$y_3(\sigma) = 0{,}118 + 0{,}054\,i - (0{,}110 + 0{,}085\,i)\cos\sigma + (-0{,}012 + 0{,}030\,i)\cos 2\sigma + (0{,}004 + 0{,}001\,i)\cos 3\sigma,$$
$$y_4(\sigma) = -0{,}067 + 0{,}020\,i + (0{,}067 + 0{,}005\,i)\cos\sigma + (0{,}004 - 0{,}023\,i)\cos 2\sigma - (0{,}004 + 0{,}002\,i)\cos 3\sigma,$$
$$y_5(\sigma) = -0{,}027 - 0{,}024\,i + (0{,}017 + 0{,}037\,i)\cos\sigma + (0{,}012 - 0{,}011\,i)\cos 2\sigma - (0{,}002 + 0{,}002\,i)\cos 3\sigma,$$
$$y_6(\sigma) = -0{,}002 - 0{,}030\,i + (-0{,}011 + 0{,}026\,i)\cos\sigma + (0{,}011 + 0{,}007\,i)\cos 2\sigma + (0{,}002 - 0{,}003\,i)\cos 3\sigma.$$

Mit Hilfe der Formeln (27), (28) erhalten wir entsprechend unserem Ansatz (7) die endgültige Zirkulationsverteilung; es ist

$$\left.\begin{aligned} \Gamma(t) = {} & 0{,}016 - 1{,}418\cos\omega t - 0{,}370\sin\omega t + 0{,}760\cos 2\omega t + 0{,}014\sin 2\omega t \\ & + 0{,}130\cos 3\omega t - 0{,}060\sin 3\omega t - 0{,}074\cos 4\omega t - 0{,}022\sin 4\omega t - 0{,}030\cos 5\omega t \\ & + 0{,}026\sin 5\omega t - 0{,}002\cos 6\omega t + 0{,}034\sin 6\omega t, \qquad \text{(in Einheiten von } u_0). \end{aligned}\right\} (38)$$

$$\gamma(\psi,t)=0{,}058\sqrt{1-\frac{\psi^2}{\alpha^2}}+\sqrt{\frac{\alpha+\psi}{\alpha-\psi}}\left\{\left(-2{,}566+0{,}044\,\frac{\psi}{\alpha}-0{,}072\,\frac{\psi^2}{\alpha^2}\right)\cos\omega t\right.$$
$$-\left(0{,}240+0{,}856\,\frac{\psi}{\alpha}+0{,}008\,\frac{\psi^2}{\alpha^2}\right)\sin\omega t+\left(1{,}426-0{,}088\,\frac{\psi^2}{\alpha^2}\right)\cos 2\omega t$$
$$+\left(0{,}276-0{,}532\,\frac{\psi}{\alpha}+0{,}032\,\frac{\psi^2}{\alpha^2}\right)\sin 2\omega t+\left(0{,}260-0{,}016\,\frac{\psi}{\alpha}-0{,}032\,\frac{\psi^2}{\alpha^2}\right)\cos 3\omega t$$
$$-\left(0{,}048+0{,}128\,\frac{\psi}{\alpha}-0{,}008\,\frac{\psi^2}{\alpha^2}\right)\sin 3\omega t-\left(0{,}142+0{,}016\,\frac{\psi}{\alpha}-0{,}032\,\frac{\psi^2}{\alpha^2}\right)\cos 4\omega t \qquad (39)$$
$$-\left(0{,}086-0{,}108\,\frac{\psi}{\alpha}+0{,}016\,\frac{\psi^2}{\alpha^2}\right)\sin 4\omega t+\left(-0{,}078+0{,}032\,\frac{\psi}{\alpha}+0{,}016\,\frac{\psi^2}{\alpha^2}\right)\cos 5\omega t$$
$$+\left(0{,}026+0{,}060\,\frac{\psi}{\alpha}-0{,}016\,\frac{\psi^2}{\alpha^2}\right)\sin 5\omega t-\left(0{,}026-0{,}060\,\frac{\psi}{\alpha}+0{,}016\,\frac{\psi^2}{\alpha^2}\right)\cos 6\omega t$$
$$\left.+\left(0{,}074-0{,}004\,\frac{\psi}{\alpha}-0{,}024\,\frac{\psi^2}{\alpha^2}\right)\sin 6\omega t\right\}. \qquad (-\alpha\leqq\psi\leqq\alpha;\quad \alpha=10^\circ).$$

Die Formeln (38) und (39) gelten für jeden beliebigen Zeitpunkt t. Ist z. B. für $t=t_0$ der Mittelpunkt des Propellerflügels 1 an der Stelle ωt_0 der Propellerkreisbahn angekommen, so ist eine momentane Zirkulation $\gamma(\psi,t_0)$. Zugleich ist dann $\gamma\left(\psi,t_0+\frac{p-1}{3}\frac{\pi}{\omega}\right)$ $(p=2,\ldots 6)$ die momentane Zirkulation der anderen fünf Propellerflügel.

8. Bestimmung der resultierenden Kraft des Voith-Schneider-Propellers. Um die resultierende Kraft des ganzen Propellers zu bestimmen, müssen wir zunächst die resultierenden Kräfte der einzelnen Propellerflügel berechnen. Dazu wenden wir den *Kutta-Joukowski*schen Satz sinngemäß an: Die resultierende Kraft K steht senkrecht auf der resultierenden Geschwindigkeit w (relativ zu dem als ruhend gedachten Profil) und hat die Größe $K=\varrho\,w\,\Gamma$. Dabei ist Γ die Gesamtzirkulation der an das Profil gebundenen „tragenden" Wirbel. w ist die Gesamtgeschwindigkeit, die am Ort des Profils relativ zu diesem herrscht, abzüglich der von den gebundenen Wirbeln des Profils selbst induzierten Geschwindigkeit. Die von den abfließenden, freien Wirbeln induzierte Geschwindigkeit ist natürlich in w enthalten. (Eine Aufteilung der resultierenden Kraft in Auftrieb und Widerstand wie in der instationären Tragflügeltheorie, wo der Widerstand durch die abgehenden, freien Wirbel hervorgerufen wird, hat beim Propeller keinen Wert.)

Die genannte Geschwindigkeit $w=\sqrt{U^2+V^2}$ setzt sich in unserem Fall in einem Punkt ωt der Kreisbahn aus folgenden Anteilen zusammen.

1. Die konstante Anströmung u_0.
2. Die Umfangsgeschwindigkeit mit den Komponenten

$$(-u_\omega)=\omega\,R\sin\omega t\,,\ (-v_\omega)=-\omega\,R\cos\omega t$$

relativ zu dem als ruhend gedachten Propellerflügel.

3. Die von den freien Wirbeln am Ort der Propellerflügel induzierten (absoluten) Geschwindigkeitskomponenten u_f, v_f.

4. Die von den gebundenen Wirbeln der anderen fünf Propellerflügel am Ort des betrachteten Flügels induzierte (absolute) Geschwindigkeit mit den Komponenten $\sum' u_\Gamma$, $\sum' v_\Gamma$.

Somit ist

$$U=u_0+\omega\,R\sin\omega t+u_f(\omega t)+\sum' u_\Gamma(\omega t);\qquad V=-\omega\,R\cos\omega t+v_f(\omega t)+\sum' v_\Gamma(\omega t)\,.$$

Da sich w über die Länge des Propellerflügels der Größe und vor allem der Richtung nach ändert, soll als die für die Berechnung der Kraft nach dem *Kutta-Joukowski*schen Satz maßgebende Geschwindigkeit w diejenige genommen werden, die jeweils im Druckmittelpunkt des Flügelprofiles herrscht. Dabei ist der Druckmittelpunkt ψ_0 definiert durch

$$\psi_0(t)=\frac{1}{\Gamma(t)}\int_{-\alpha}^{\alpha}\psi\,\gamma(\psi,t)\,d\psi\,. \qquad (40)$$

Die Auswertung des Integrales in (40) wird ganz einfach, wenn man auf die Variable σ zurückgeht.

Die Bestimmung des unter 3) genannten Geschwindigkeitsanteiles erfolgt nach Gleichung (4) unter Verwendung der Integralformeln (31), (32), (33), (34). Sie ist ohne weiteres möglich.

Für die Bestimmung des unter 4) genannten Geschwindigkeitsanteiles können wir uns jeweils die fünf Propellerflügel durch Punktwirbel mit den entsprechenden Gesamtzirkulationen ersetzt

denken. Die Geschwindigkeit, die ein im Punkt $R\,e^{i\omega t^*}$ der Propellerkreisbahn angebrachter Wirbel $R\cdot\Gamma(t^*)$ in einem anderen Punkt $R\,e^{i\omega t}$ der Kreisbahn induziert, ergibt sich nach der elementaren Theorie zu

$$u_\Gamma(\omega t)=\frac{\Gamma(t^*)}{4\pi}\,\frac{\cos\frac{\omega}{2}(t+t^*)}{\sin\frac{\omega}{2}(t-t^*)},\qquad v_\Gamma(\omega t)=\frac{\Gamma(t^*)}{4\pi}\,\frac{\sin\frac{\omega}{2}(t+t^*)}{\sin\frac{\omega}{2}(t-t^*)}.$$

Unter Benutzung dieser Formeln können die unter 4) genannten Geschwindigkeiten leicht berechnet werden.

Hat man nun auf diese Weise die resultierenden Kräfte der einzelnen Propellerflügel bestimmt, so kann man aus diesen ohne weiteres die resultierende Gesamtkraft des Voith-Schneider-Propellers zusammensetzen.

Wir wollen nun die eben allgemein dargelegte Bestimmung der Kräfte an unserem Beispiel von Abschnitt 7 durchführen. Die Zahlenwerte der Geschwindigkeiten sind auf Einheiten von u_0 bezogen. In Tabelle 1 sind die einzelnen oben erwähnten Anteile der Gesamtgeschwindigkeit w (relativ zum Propellerflügel) zusammengestellt.

Tabelle 1.

ωt	$\Sigma' u_\Gamma$	$\Sigma' v_\Gamma$	u_f	v_f	$-u_\omega$	$-v_\omega$	u_0
0	+0,120	—0,056	+2,319	+0,189	0,000	—16,000	+1,000
$\pi/6$	+0,035	—0,082	+1,850	+0,179	+ 8,000	—13,856	+1,000
$\pi/3$	—0,011	—0,270	+0,891	—0,206	+13,856	— 8,000	+1,000
$\pi/2$	+0,096	—0,443	—0,558	—0,754	+16,000	0,000	+1,000
$2\pi/3$	+0,272	—0,482	+0,068	—1,037	+13,856	+ 8,000	+1,000
$5\pi/6$	+0,321	—0,305	+0,698	—0,757	+ 8,000	+13,856	+1,000
π	+0,132	—0,154	+1,001	—0,215	0,000	+16,000	+1,000
$7\pi/6$	—0,136	—0,242	+0,923	+0,431	— 8,000	+13,856	+1,000
$4\pi/3$	—0,161	—0,408	+0,441	+0,887	—13,856	+ 8,000	+1,000
$3\pi/2$	—0,051	—0,441	—0,274	+0,824	—16,000	0,000	+1,000
$5\pi/3$	+0,119	—0,359	+1,326	+0,277	—13,856	— 8,000	+1,000
$11\pi/6$	+0,149	—0,145	+2,175	+0,179	— 8,000	—13,856	+1,000

Aus Tabelle 1 entnehmen wir leicht die Geschwindigkeiten U, V und $w=\sqrt{U^2+V^2}$. Die Richtung von w gibt $\beta=$ arc tg V/U an (gegen die positive x-Achse gemessen). Das Ergebnis ist in Tabelle 2 zusammengestellt.

Tabelle 2.

ωt	U	V	w	β	ωt	U	V	w	β
0	+ 3,439	—15,867	16,23	—77,77°	π	+ 2,133	+15,631	15,78	+ 82,23°
$\pi/6$	+10,885	—13,759	17,54	—51,65°	$7\pi/6$	— 6,213	+14,045	15,37	+113,86°
$\pi/3$	+15,736	— 8,476	17,87	—28,32°	$4\pi/3$	—12,576	+ 8,479	15,17	+146,01°
$\pi/2$	+16,538	— 1,197	16,58	— 4,13°	$3\pi/2$	—15,325	+ 0,383	15,33	+178,57°
$2\pi/3$	+15,196	+ 6,481	16,52	+23,10°	$5\pi/3$	—11,411	— 8,082	13,98	—144,68°
$5\pi/6$	+10,019	+12,694	16,17	+51,72°	$11\pi/6$	— 4,676	—13,822	14,59	—108,69°

Die Berechnung des Druckmittelpunktes nach Formel (40) liefert das in Tabelle 3 wiedergegebene Ergebnis

Tabelle 3.

ωt	y_0/α	ωt	y_0/α	ωt	y_0/α	ωt	y_0/α	ωt	y_0/α	ωt	y_0/α
0°	0,51	60°	0,62	120°	0,24	180°	0,50	240°	0,52	300°	0,28
15°	0,60	75°	0,61	135°	0,45	195°	0,50	255°	0,71	315°	0,25
30°	0,64	90°	0,59	150°	0,47	210°	0,51	270°	0,34	330°	0,31
45°	0,63	105°	0,60	165°	0,49	225°	0,52	285°	0,32	345°	0,41

Nun haben wir alle Größen beisammen, die für die Berechnung der resultierenden Kräfte an den Propellerflügeln benötigt werden. In Tabelle 4 sind sie übersichtlich zusammengestellt. Dabei ist die resultierende Geschwindigkeit w im Druckmittelpunkt nach Größe und Richtung mit Hilfe von Tabelle 2 interpoliert. Die angegebenen Richtungswinkel sind wie üblich gegen die positive x-Achse

gerechnet. Ferner sind, wie schon gesagt, Γ und w in Einheiten von u_0 und entsprechend K in Einheiten von $\varrho\, u_0^2 R$ angegeben.

Tabelle 4.

Lage des Profilmittelpunktes	Lage des Druckmittelpunktes	result. Geschwindigkeit w im Druckmittelpkt.	Richtung von w im Druckmittelpunkt	Profilzirkulation Γ	Größe der result. Kraft K	Richtung der result. Kraft K	Richtung des Propellerflügelprofiles
0°	5,1°	16,45	— 73,4°	—0,618	10,17	—163,4°	— 76,0°
15°	21,0°	17,21	— 59,5°	—0,740	12,73	—149,5°	— 61,4°
30°	36,4°	17,68	— 46,7°	—1,006	17,79	—136,7°	— 47,8°
45°	51,3°	17,92	— 35,1°	—1,324	23,73	—125,1°	— 35,0°
60°	66,2°	17,60	— 23,3°	—1,495	26,31	—113,3°	— 22,9°
75°	81,1°	16,75	— 11,4°	—1,416	23,72	—101,4°	— 11,3°
90°	95,9°	16,57	+ 1,2°	—1,100	18,23	— 88,8°	0,0°
105°	111,0°	16,53	+ 14,9°	—0,559	9,24	— 75,1°	+ 11,3°
120°	122,4°	16,49	+ 25,4°	+0,151	2,49	+115,4°	+ 22,9°
135°	139,5°	16,33	+ 41,7°	+0,862	14,08	+131,7°	+ 35,0°
150°	154,7°	16,11	+ 56,5°	+1,412	22,75	+146,5°	+ 47,8°
165°	169,9°	15,90	+ 71,9°	+1,787	28,41	+161,9°	+ 61,4°
180°	185,0°	15,71	+ 87,5°	+2,018	31,70	+177,5°	+ 76,0°
195°	200,0°	15,49	+103,3°	+2,059	31,89	—166,7°	+ 91,4°
210°	215,1°	15,33	+119,3°	+1,862	28,54	—150,7°	+107,8°
225°	230,2°	15,18	+135,4°	+1,464	22,22	—134,6°	+125,0°
240°	245,2°	15,20	+151,6°	+0,899	13,66	—118,4°	+142,9°
255°	262,1°	15,32	+170,0°	+0,177	2,71	—100,0°	+161,3°
270°	273,4°	15,18	—177,3°	—0,532	8,08	+ 92,7°	0,0°
285°	288,2°	14,65	—159,1°	—0,918	13,45	+110,9°	—161,3°
300°	302,8°	14,04	—141,4°	—0,871	12,23	+128,6°	—142,9°
315°	317,5°	14,23	—123,7°	—0,642	9,13	+146,3°	—125,0°
330°	333,1°	14,76	—105,5°	—0,528	7,79	+164,5°	—107,8°
345°	349,1°	15,60	— 89,0°	—0,558	8,70	—179,0°	— 91,4°

Um nun die resultierende Gesamtkraft des Voith-Schneider-Propellers für verschiedene Propellerstellungen aus den Kräften der einzelnen Flügelprofile zusammensetzen zu können, berechnet man am besten aus den in Tabelle 4 gegebenen Werten die Kraft K zerlegt in ihre x- und y-Komponente K_x und K_y.

Das Ergebnis gibt Tabelle 5 an.

Tabelle 5.

Mittelpunkt des Flügelprofiles	K_x	K_y	Mittelpunkt des Flügelprofiles	K_x	K_y	Mittelpunkt des Flügelprofiles	K_x	K_y
0°	— 9,75	— 2,90	120°	— 1,07	+ 2,25	240°	—6,50	—12,01
15°	—10,97	— 6,46	135°	— 9,36	+10,51	255°	—0,47	— 2,67
30°	—12,95	—12,20	150°	—18,97	+12,56	270°	—0,38	+ 8,07
45°	—13,64	—19,41	165°	—27,00	+ 8,83	285°	—4,80	+12,56
60°	—10,41	—24,16	180°	—31,67	+ 1,38	300°	—7,63	+ 9,56
75°	— 4,69	—23,25	195°	—31,03	— 7,33	315°	—7,60	+ 5,07
90°	+ 0,38	—18,22	210°	—24,89	—13,97	330°	—7,50	+ 2,08
105°	+ 2,38	— 8,93	225°	—15,61	—15,82	345°	— 8,70	— 0,15

Somit ergibt sich für die resultierende Gesamtkraft unseres Voith-Schneider-Propellers durch einfache Addition der Werte aus Tabelle 5 folgendes Endergebnis:

in der Stellung 0 des Propellers: $K_x^{(p)} = -67{,}03\, \varrho\, u_0^2 R$; $K_y^{(p)} = -25{,}88\, \varrho\, u_0^2 R$; $K^{(p)} = 71{,}84\, \varrho\, u_0^2 R$;
Richtung: $\beta_K = -158{,}9°$;

in der Stellung $\pi/12$ des Propellers: $K_x^{(p)} = -64{,}12\, \varrho\, u_0^2 R$; $K_y^{(p)} = -24{,}13\, \varrho\, u_0^2 R$; $K^{(p)} = 68{,}51\, \varrho\, u_0^2 R$;
Richtung: $\beta_K = -159{,}4°$;

in der Stellung $\pi/6$ des Propellers: $K_x^{(p)} = -64{,}31\, \varrho\, u_0^2 R$; $K_y^{(p)} = -21{,}68\, \varrho\, u_0^2 R$; $K^{(p)} = 67{,}86\, \varrho\, u_0^2 R$;
Richtung: $\beta_K = -161{,}4°$;

in der Stellung $\pi/4$ des Propellers: $K_x^{(p)} = -67{,}37\, \varrho\, u_0^2 R$; $K_y^{(p)} = -22{,}92\, \varrho\, u_0^2 R$; $K^{(p)} = 71{,}17\, \varrho\, u_0^2 R$;
Richtung: $\beta_K = -161{,}2°$.

Die Stellung $\pi/3$ ist wieder identisch mit der Stellung 0 usw.

Als Mittelwert ergibt sich $K_x^{(p)} = -65{,}71\, \varrho\, u_0^2 R$; $K_y^{(p)} = -23{,}65\, \varrho\, u_0^2 R$; $K^{(p)} = 69{,}84\, \varrho\, u_0^2 R$;
Richtung: $\beta_K = -160{,}2°$.

Man erkennt, daß die resultierende Kraft nicht genau entgegengesetzt zur Anströmrichtung gerichtet ist, sondern mit dieser einen Winkel von etwa 19,8° bildet. Bei der hier betrachteten Lage des Anstellwinkels Null der Propellerflügel bei $\pi/2$ und $3\pi/2$ liefert der Propeller also keine genaue Vorwärtsfahrt, sondern eine Fahrtrichtung, die um 19,8° im Sinn der Rotation des Propellers gedreht ist.

9. Lage des Anstellwinkels Null der Propellerflügel bei genauer Vorwärtsfahrt. Wir wollen nun untersuchen, an welcher Stelle der Anstellwinkel Null der Propellerflügel gegenüber der Kreisbahn liegen muß, um genaue Vorwärtsfahrt (d. h. resultierende Propellerkraft entgegengesetzt zur Anströmung) zu erreichen. Um diese Frage streng zu beantworten, müßte man die ganze Iterationsrechnung zur Bestimmung der Zirkulationsverteilung mit einem offen gelassenen λ wiederholen und λ erst zum Schluß aus der obigen Bedingung bestimmen. (Wir hatten in unserem Beispiel $\lambda = 0$ gesetzt; vgl. S. 391). Dann werden Γ und auch w und $\beta = \operatorname{arc\,tg}\, V/U$ Funktionen von λ. Die Rechenarbeit (man denke an arc tg!) wäre sehr umfangreich, und deshalb soll dieser Weg hier nicht gegangen werden.

Eine angenäherte Lösung für die gestellte Aufgabe kann man sich jedoch verschaffen, indem man der Grundanströmung u_0 in x-Richtung noch eine kleine Komponente v_0 in y-Richtung überlagert. Unter der Voraussetzung, daß dann in der Integralgleichung (6) lediglich auf der linken Seite noch die Glieder

$$-2\,v_0 \sin(\varphi + \omega t) - 2\,v_0 \frac{r_0'}{R} \cos\omega t \cos(\varphi + \omega t)$$

hinzutreten, kann man den durch v_0 hervorgerufenen Zusatzanteil Γ^* der Zirkulation getrennt berechnen und für die Hauptzirkulation Γ das bisherige Ergebnis (38) beibehalten.

Diese Voraussetzung trifft aber eben nicht streng zu, denn die freien Wirbel fließen jetzt nicht mehr in Richtung der x-Achse ab, sondern um den Winkel $\operatorname{arc\,tg}\, v_0/u_0$ gegen die x-Achse geneigt. Solange v_0/u_0 klein ist, kann indessen die Berücksichtigung dieses Umstandes bei einer Näherungsrechnung unterbleiben, um so mehr als nur die in der Nähe des Propellers befindlichen abfließenden freien Wirbel eine wesentliche Rolle spielen.

Ferner wollen wir den Einfluß, den die zusätzliche Zirkulation Γ^* auf Größe und Richtung der resultierenden Geschwindigkeit w hat, vernachlässigen. Seine Berücksichtigung würde dieselben umständlichen Rechnungen wie oben geschildert erforderlich machen. Außerdem ist dieser Einfluß wegen des Überwiegens der Umfangsgeschwindigkeit klein; und auch wegen des in der Integralgleichung begangenen prinzipiellen Fehlers mit der Abflußrichtung der freien Wirbel hat eine zu genaue Rechnung jetzt keinen Zweck.

Zur Bestimmung der zusätzlichen Zirkulationsverteilung wird das bekannte Iterationsverfahren angewendet. Das Ergebnis ist

$$\Gamma^*(t) = v_0/u_0\,(0{,}14 - 0{,}255\cos\omega t + 1{,}045\sin\omega t + 0{,}255\cos 2\omega t + 0{,}03\sin 2\omega t + 0{,}03\cos 3\omega t - 0{,}03\sin 3\omega t - 0{,}01\cos 4\omega t - 0{,}01\sin 4\omega t)\,.$$

Es sei erwähnt, daß zur Berechnung von Γ^* lediglich drei Iterationsschritte erforderlich waren, da gleich mit einer geschickten Schätzung begonnen wurde.

Γ^* ist in Einheiten von u_0 berechnet. In Tabelle 6 ist die zusätzliche Zirkulation Γ^* zusammen mit den von ihr an den Propellerflügeln hervorgerufenen Zusatzkräften K^* nach Größe und Richtung angegeben. Bei der Berechnung von K^* wurde (wie oben erläutert) der Wert w aus Tabelle 4 benutzt. K^* ist in Einheiten von $\varrho\, u_0^2\, R$ angegeben.

Die Zerlegung von K^* in seine x- und y-Komponente liefert Tabelle 7.

Für die resultierende Gesamtkraft des Voith-Schneider-Propellers (einschl. der eben betrachteten Zusatzkraft) ergibt sich somit folgendes Ergebnis:

in der Stellung 0 des Propellers:
$$K_x^{(P)} = -\left(67{,}03 + 13{,}4\,\frac{v_0}{u_0}\right)\varrho\, u_0^2\, R,$$
$$K_y^{(P)} = -\left(25{,}88 - 50{,}9\,\frac{v_0}{u_0}\right)\varrho\, u_0^2\, R;$$

in der Stellung $\pi/12$ des Propellers:
$$K_x^{(P)} = -\left(64{,}12 + 14{,}6\,\frac{v_0}{u_0}\right)\varrho\, u_0^2\, R,$$
$$K_y^{(P)} = -\left(24{,}13 - 51{,}4\,\frac{v_0}{u_0}\right)\varrho\, u_0^2\, R;$$

Tabelle 6.

Mittelpunkt des Flügelprofiles	Zusätzl. Zirkulation Γ^*	Größe der Zusatzkraft K^*	Richtung der Zusatzkraft K^*	Mittelpunkt des Flügelprofiles	Zusätzl. Zirkulation Γ^*	Größe der Zusatzkraft K^*	Richtung der Zusatzkraft K^*
0°	$+0{,}16\,\frac{v_0}{u_0}$	$2{,}6\,\frac{v_0}{u_0}$	+ 16,6°	180°	$+0{,}61\,\frac{v_0}{u_0}$	$9{,}6\,\frac{v_0}{u_0}$	+177,5°
15°	$+0{,}39\,\frac{v_0}{u_0}$	$6{,}7\,\frac{v_0}{u_0}$	+ 30,5°	195°	$+0{,}34\,\frac{v_0}{u_0}$	$5{,}3\,\frac{v_0}{u_0}$	—166,7°
30°	$+0{,}56\,\frac{v_0}{u_0}$	$9{,}9\,\frac{v_0}{u_0}$	+ 43,3°	210°	$-0{,}04\,\frac{v_0}{u_0}$	$0{,}6\,\frac{v_0}{u_0}$	+ 29,3°
45°	$+0{,}70\,\frac{v_0}{u_0}$	$12{,}5\,\frac{v_0}{u_0}$	+ 54,9°	225°	$-0{,}34\,\frac{v_0}{u_0}$	$5{,}2\,\frac{v_0}{u_0}$	+ 45,4°
60°	$+0{,}80\,\frac{v_0}{u_0}$	$14{,}1\,\frac{v_0}{u_0}$	+ 66,7°	240°	$-0{,}70\,\frac{v_0}{u_0}$	$10{,}6\,\frac{v_0}{u_0}$	+ 61,6°
75°	$+0{,}88\,\frac{v_0}{u_0}$	$14{,}8\,\frac{v_0}{u_0}$	+ 78,6°	255°	$-1{,}01\,\frac{v_0}{u_0}$	$15{,}5\,\frac{v_0}{u_0}$	+ 80,0°
90°	$+0{,}95\,\frac{v_0}{u_0}$	$15{,}7\,\frac{v_0}{u_0}$	+ 91,2°	270°	$-1{,}20\,\frac{v_0}{u_0}$	$18{,}2\,\frac{v_0}{u_0}$	+ 92,7°
105°	$+1{,}01\,\frac{v_0}{u_0}$	$16{,}7\,\frac{v_0}{u_0}$	+104,9°	285°	$-1{,}23\,\frac{v_0}{u_0}$	$18{,}0\,\frac{v_0}{u_0}$	+110,9°
120°	$+1{,}05\,\frac{v_0}{u_0}$	$17{,}3\,\frac{v_0}{u_0}$	+115,4°	300°	$-1{,}08\,\frac{v_0}{u_0}$	$15{,}2\,\frac{v_0}{u_0}$	+128,6°
135°	$+1{,}04\,\frac{v_0}{u_0}$	$17{,}0\,\frac{v_0}{u_0}$	+131,7°	315°	$-0{,}80\,\frac{v_0}{u_0}$	$11{,}4\,\frac{v_0}{u_0}$	+146,3°
150°	$+0{,}97\,\frac{v_0}{u_0}$	$15{,}6\,\frac{v_0}{u_0}$	+146,5°	330°	$-0{,}45\,\frac{v_0}{u_0}$	$6{,}6\,\frac{v_0}{u_0}$	+164,5°
165°	$+0{,}82\,\frac{v_0}{u_0}$	$13{,}0\,\frac{v_0}{u_0}$	+161,9°	345°	$-0{,}12\,\frac{v_0}{u_0}$	$1{,}9\,\frac{v_0}{u_0}$	—179,0°

Tabelle 7.

Mittelpunkt d. Flügelprofiles	K_x^*	K_y^*	Mittelpunkt d. Flügelprofiles	K_x^*	K_y^*	Mittelpunkt d. Flügelprofiles	K_x^*	K_y^*
0°	$+2{,}49\,\frac{v_0}{u_0}$	$+\ 0{,}74\,\frac{v_0}{u_0}$	120°	$-\ 7{,}42\,\frac{v_0}{u_0}$	$+15{,}62\,\frac{v_0}{u_0}$	240°	$+5{,}04\,\frac{v_0}{u_0}$	$+\ 9{,}32\,\frac{v_0}{u_0}$
15°	$+5{,}77\,\frac{v_0}{u_0}$	$+\ 3{,}40\,\frac{v_0}{u_0}$	135°	$-11{,}31\,\frac{v_0}{u_0}$	$+12{,}69\,\frac{v_0}{u_0}$	255°	$+2{,}69\,\frac{v_0}{u_0}$	$+15{,}27\,\frac{v_0}{u_0}$
30°	$+7{,}21\,\frac{v_0}{u_0}$	$+\ 6{,}79\,\frac{v_0}{u_0}$	150°	$-13{,}01\,\frac{v_0}{u_0}$	$+\ 8{,}61\,\frac{v_0}{u_0}$	270°	$-0{,}86\,\frac{v_0}{u_0}$	$+18{,}18\,\frac{v_0}{u_0}$
45°	$+7{,}19\,\frac{v_0}{u_0}$	$+10{,}23\,\frac{v_0}{u_0}$	165°	$-12{,}36\,\frac{v_0}{u_0}$	$+\ 4{,}04\,\frac{v_0}{u_0}$	285°	$-6{,}42\,\frac{v_0}{u_0}$	$+16{,}81\,\frac{v_0}{u_0}$
60°	$+5{,}57\,\frac{v_0}{u_0}$	$+12{,}94\,\frac{v_0}{u_0}$	180°	$-\ 9{,}59\,\frac{v_0}{u_0}$	$+\ 0{,}42\,\frac{v_0}{u_0}$	300°	$-9{,}48\,\frac{v_0}{u_0}$	$+11{,}88\,\frac{v_0}{u_0}$
75°	$+2{,}92\,\frac{v_0}{u_0}$	$+14{,}50\,\frac{v_0}{u_0}$	195°	$-\ 5{,}16\,\frac{v_0}{u_0}$	$-\ 1{,}22\,\frac{v_0}{u_0}$	315°	$-9{,}48\,\frac{v_0}{u_0}$	$+\ 6{,}33\,\frac{v_0}{u_0}$
90°	$-0{,}33\,\frac{v_0}{u_0}$	$+15{,}70\,\frac{v_0}{u_0}$	210°	$+\ 0{,}52\,\frac{v_0}{u_0}$	$+\ 0{,}29\,\frac{v_0}{u_0}$	330°	$-6{,}36\,\frac{v_0}{u_0}$	$+\ 1{,}76\,\frac{v_0}{u_0}$
105°	$-4{,}29\,\frac{v_0}{u_0}$	$+16{,}13\,\frac{v_0}{u_0}$	225°	$+\ 3{,}65\,\frac{v_0}{u_0}$	$+\ 3{,}70\,\frac{v_0}{u_0}$	345°	$-1{,}90\,\frac{v_0}{u_0}$	$-\ 0{,}03\,\frac{v_0}{u_0}$

in der Stellung $\pi/6$ des Propellers:

$$K_x^{(p)} = -\left(64{,}31 + 12{,}8\,\frac{v_0}{u_0}\right)\varrho\, u_0^2\, R,$$

$$K_y^{(p)} = -\left(21{,}68 - 51{,}3\,\frac{v_0}{u_0}\right)\varrho\, u_0^2\, R;$$

in der Stellung $\pi/4$ des Propellers:

$$K_x^{(p)} = -\left(67{,}37 + 14{,}1\,\frac{v_0}{u_0}\right)\varrho\, u_0^2\, R,$$

$$K_y^{(p)} = -\left(22{,}92 - 50{,}9\,\frac{v_0}{u_0}\right)\varrho\, u_0^2\, R.$$

Für die gesuchte genaue Vorwärtsfahrt (resultierende Gesamtkraft entgegengesetzt zur Anströmung) muß $K_y^{(p)}/K_x^{(p)} = v_0/u_0$ sein. Diese Bedingung ergibt

in der Stellung 0 des Propellers: $\frac{v_0}{u_0} = 0{,}21$, $\operatorname{arc\,tg} \frac{v_0}{u_0} = 11{,}9°$,

in der Stellung $\pi/12$ des Propellers: $\frac{v_0}{u_0} = 0{,}20$, $\operatorname{arc\,tg} \frac{v_0}{u_0} = 11{,}3°$,

in der Stellung $\pi/6$ des Propellers: $\frac{v_0}{u_0} = 0{,}18$, $\operatorname{arc\,tg} \frac{v_0}{u_0} = 10{,}2°$,

in der Stellung $\pi/4$ des Propellers: $\frac{v_0}{u_0} = 0{,}19$, $\operatorname{arc\,tg} \frac{v_0}{u_0} = 10{,}7°$.

Als Mittelwert erhalten wir $\frac{v_0}{u_0} = 0{,}195$, $\operatorname{arc\,tg} \frac{v_0}{u_0} = 11{,}0°$.

Legen wir nun eine Anströmung mit $v_0/u_0 = 0{,}195$ zugrunde, so wird

in der Stellung 0 des Propellers: $K_x^{(p)} = -69{,}6\,\varrho\,u_0^2 R$, $K_y^{(p)} = -15{,}9\,\varrho\,u_0^2 R$, $K^{(p)} = 71{,}4\,\varrho\,u_0^2 R$, Richtung: $\beta_K = -167°$;

in der Stellung $\pi/12$ des Propellers: $K_x^{(p)} = -67{,}0\,\varrho\,u_0^2 R$, $K_y^{(p)} = -14{,}1\,\varrho\,u_0^2 R$, $K^{(p)} = 68{,}4\,\varrho\,u_0^2 R$, Richtung: $\beta_K = -168°$;

in der Stellung $\pi/6$ des Propellers: $K_x^{(p)} = -66{,}8\,\varrho\,u_0^2 R$, $K_y^{(p)} = -11{,}7\,\varrho\,u_0^2 R$, $K^{(p)} = 67{,}8\,\varrho\,u_0^2 R$, Richtung: $\beta_K = -170°$;

in der Stellung $\pi/4$ des Propellers: $K_x^{(p)} = -70{,}1\,\varrho\,u_0^2 R$, $K_y^{(p)} = -13{,}0\,\varrho\,u_0^2 R$, $K^{(p)} = 71{,}3\,\varrho\,u_0^2 R$, Richtung: $\beta_K = -170°$.

Zurückkommend auf die Fragestellung am Anfang von Abschnitt 9 können wir jetzt das Ergebnis formulieren: Bei einer Anströmung in x-Richtung muß der Anstellwinkel Null der Propellerflügel etwa an den Stellen 79° und 259° liegen, wenn genaue Vorwärtsfahrt erreicht werden soll. Dabei schwankt die Vortriebsrichtung um etwa $\pm 1{,}5°$ um den Mittelwert, je nach der momentanen Stellung des Propellers. Die Größe der resultierenden Kraft schwankt um etwa $\pm 3\%$ um den Mittelwert.

(Eingegangen am 5. Februar 1955.)

Anschrift des Verfassers: Dr.-Ing. *W. Isay*, Berlin-Dahlem, Schweinfurthstr. 90.

The Equations of Motion for Curved Elastic Bars deduced by the use of the „Method of Internal Constraints"

By E. Volterra

1. Introduction. The equations of motion for curved bars are derived taking into account the influence of shear and of rotatory inertia by assuming that during motion the sections originally normal to the axis of the bar remain plane.

The elastic isotropic homogeneous bar is supposed to be an elongated solid with a curvilinear baricentric axis. It will be referred to a fixed system of orthogonal cartesian coordinates (Ω,ξ,η,ζ) and to a system of curvilinear right-handed coordinate system $(0, x, y, z)$ in which the origin 0 coincides with a generic point on the central axis of the bar, x with the central axis (and has as positive direction the positive direction of the central axis), y coincides with the principal normal $(\bar{n})$ and is directed positively towards the center of curvature, and z coincides with the binormal $(\bar{b})$ at 0 (see fig. 1).

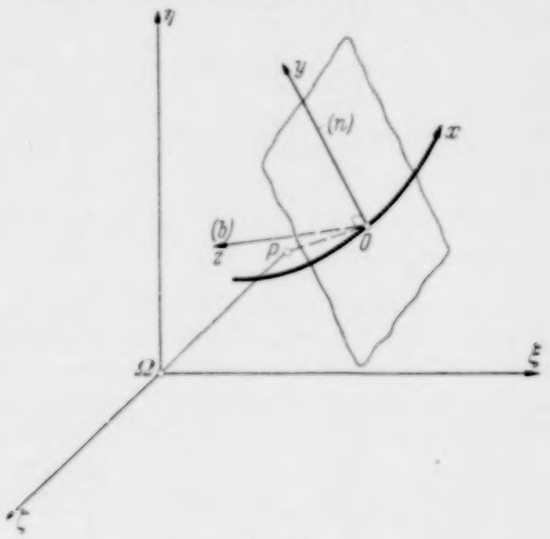


Fig. 1.

The condition that the sections originally normal to the axis of the bar remain plane during motion implies that the elastic displacement vector $\bar{V}$ at a generic point P of the bar depends linearly only on the coordinates y and z or that the following vector equation be verified:

$$\bar{V}(x, y, z, t) = \bar{v}(x,t) + y\,\bar{\lambda}(x, t) + z\,\bar{\mu}(x, t) \qquad (1)$$

where $\bar{v}$, $\bar{\lambda}$ and $\bar{\mu}$ are three vectors, a priori unknown, functions of the variables x and t.

This method of analysis, which was used more than twenty years ago to study static deformations of curved elastic bars[1], will be referred to as the „Method of Internal Constraints", since the fundamental hypothesis on which the method is based rests on the assumption that the elastic displacement of the bar occurs under the special condition of internal constraint expressed by equation (1).

The geometric significance of the internal constraint will be first discussed, then the expression for the square of the element of length (ds^2) will be derived in the more general case in which the central axis of the bar has both first and second curvatures (which will be denoted respectively by the letters c and τ). Thus, from the fundamental (Euclidean) metric tensor it is possible to calculate the components of the strain and then the expressions for the Potential and Kinetic Energies of the bar in terms of the nine (unknown) components $\nu_x, \nu_y, \nu_z; \lambda_x, \lambda_y, \lambda_z; \mu_x, \mu_y, \mu_z$ of the three vectors $\bar{v}$, $\bar{\lambda}$ and $\bar{\mu}$.

The application of *Hamilton*'s Principle furnishes the nine differential equations and the boundary conditions which univocally determine the nine unknown functions $\nu_x, \nu_y, \nu_z; \lambda_x, \lambda_y, \lambda_z; \mu_x, \mu_y, \mu_z$ in the case of free vibrations.

The case in which external forces are acting on the bar can be dealt with by introducing into the variational principle the work done by these external forces.

Although the method of analysis presented in this paper applies to the general case in which the curvature of the central axis and the inertia characteristics of the cross-section of the bar are known functions of the variable x, for simplicity sake, the equations of motion will be derived only for the particular case in which the curvature and cross-section area of the bar are constant.

2. Geometric significance of the internal constraints. Consider a generic element P of the bar in the natural (undeformed) state and call x, y, z its coordinates, while call x', y', z' its coordinates in a new position P' when deformed, and u, v, w, the components of the elastic displacement along the

[1] See *Enrico Volterra*, Verhandlungen des Internationalen Mathematiker-Kongreß Zürich 1932 II. Band, p. 247; Rendiconti Accademia Lincei 16 (1932) p. 220; 20 (1934) p. 424, 463; 21 (1935) p. 14; 23 (1936) p. 329.

x, y and z axes. From equations (1) it follows that

$$\left.\begin{aligned} x' &= x + u = x + v_x + \mu_x z + \lambda_x y\,, \\ y' &= y + v = y + v_y + \mu_y z + \lambda_y y\,, \\ z' &= z + w = z + v_z + \mu_z z + \lambda_z y\,. \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

The passage from the position $P(x,y,z)$ to the new position $P'(x',y',z')$ can be imagined decomposed in two successive transformations:

1) A first transformation T_1 which brings point P to an auxiliary point $P_1(x_1,y_1,z_1)$.

2) A second transformation T_2 which brings point P_1 to its final position P'.

These two transformations are defined by the following equations:

$$T_1 \left\{\begin{aligned} x_1 &= x && \text{(a)}, \\ y_1 &= y + v_y + \mu_y z + \lambda_y y && \text{(b)}, \\ z_1 &= z + v_z + \mu_z z + \lambda_z y && \text{(c)}, \end{aligned}\right\} \tag{3}$$

$$T_2 \left\{\begin{aligned} x' &= x_1 + v_x + \mu_x z_1 + \lambda_x y_1\,, \\ y' &= y_1\,, \\ z' &= z_1\,. \end{aligned}\right\} \tag{4}$$

In fact, by substititing into equations (4) instead of x_1, y_1, z_1 their values given by equations (3) and observing that the quantities $\mu_y z_1$, $\lambda_y y_1$, $v_y(x_1)$; $\mu_z z_1$, $\lambda_z y_1$, $v_z(x_1)$ differ from the quantities $\mu_y z, \lambda_y y, v_y(x)$; $\mu_z z; \lambda_z y$, $v_z(x)$ of very small quantities, which in the present order of approximation may be neglected, equations (2) are obtained.

Let us analyze separately the two transformations T_1 and T_2. Since in the transformation T_1: $x = x_1$, it follows that the transformation T_1 operates in a generic plane normal to the axis of the bar. Accordingly in this transformation not only does every normal section of the bar remain plane, but, moreover each normal section transforms into itself, according to formulae (b) and (c) of equations (3). Transformation T_1 is a linear transformation whose geometric significance is an affinity since the axes at infinity correspond to each other.

As it is well known, its geometric interpretation is a pure deformation accompanied by a rigid motion. In fact, by using the following notation:

$$\left.\begin{aligned} f &= \frac{1}{2}\left[\mu_z z^2 + (\lambda_z + \mu_y)\, x\, y + \lambda_y y^2\right], \\ \omega &= \frac{1}{2}\,(\mu_y - \lambda_z)\,, \\ a_y &= v_y\,, \qquad a_z = v_z \end{aligned}\right\} \tag{5}$$

equations (b) and (c) of equations (3) can be written under the form

$$\left.\begin{aligned} y_1 - y &= \frac{df}{dy} + \omega z + a_y\,, \\ z_1 - z &= \frac{df}{dz} - \omega y + a_z\,, \end{aligned}\right\} \tag{6}$$

where a_y and a_z are the components in the $y\,z$ plane of a vector $\bar{a}$, while ω is the component in the x direction of a vector $\bar{\omega}$ normal to the $y\,z$ plane.

If the deformation is infinitesimal, then the three terms of the right-hand side of equations (6) may be considered as the result of three successive transformations:

1) A pure deformation which displaces point P to point P' defined by

$$(P' - 0) = (P - 0) + \operatorname{grad} f\,. \tag{7}$$

2) A rotation which displaces point P' to point P'' defined by

$$(P'' - 0) = (P' - 0) + \bar{\omega} \times (P' - 0)\,. \tag{8}$$

3) A translation which displaces point P'' to point P_1 defined by

$$(P_1 - 0) = (P'' - 0) + \bar{a}\,. \tag{9}$$

In fact, by substituting equations (7) and (8) into equation (9) the former equations (6) are obtained.

As a consequence of the transformation T_2 defined by equation (4), each longitudinal fiber of the bar (i. e. parallel to the x axis) is subjected to a rigid displacement along itself, the amplitude of the displacement $x' - x_1$ varying from fiber to fiber.

It thus follows from equations (4) that

$$x' - x_1 = \lambda_x y_1 + \mu_x z_1 + \nu_x \tag{10}$$

and that

$$x' - x_1 = 0$$

when

$$\lambda_x y_1 + \mu_x z_1 + \nu_x = 0. \tag{11}$$

With reference to the π_1 plane normal to the x axis of the bar (π_1 being the original plane π normal to the axis of the bar and which has been transformed in accordance with the T_1 transformation) the fibers parallel to the x axis (and therefore normal to the π_1 plane) can be identified by their intersection Q with the π_1 plane.

Since equations (10) can be written as

$$x' - x_1 = \sqrt{\mu_x^2 + \lambda_x^2}\left(\frac{\nu_x + \mu_x z_1 + \lambda_x y_1}{\sqrt{\mu_x^2 + \lambda_x^2}}\right) \tag{12}$$

it follows that the above displacement is proportional to the distance of point Q from the axis r of the π_1 plane, the axis r being defined by equation (11).

Due to the fact that the displacement

$$x' - x_1 = \nu_x + \mu_x z_1 + \lambda_x y_1 \tag{10}$$

in the plane π_1 is supposed to be infinitesimal, it can be considered as a rigid rotation around the r axis in the same plane.

Since the transformation T_1 operates in the normal sections of the bar by transforming into themselves, while the T_2 transformation produces a rotation of the transformed sections around the r axes, it follows that as a consequence of the deformation produced by the constraints and expressed by equations (1), or the analogous transformations T_1 and T_2 represented by equations (3) and (4), the sections normal to the axis of the bar remain plane.

3. Expressions of ds^2 Components of strain in orthogonal curvilinear coordinates. In order to derive the expression of the square of the line element ds^2 in the orthogonal curvilinear system x, y, z, consider a generic point P of the bar of coordinates x, y, and z. Denoting by 0 the intersection of the normal from P to the central axis of the bar (axis x) with this x axis (see fig. 1) call $\bar{t}$, $\bar{n}$ and $\bar{b}$ the unit vectors of the tangent normal and binormal to the central line at point 0.

A generic displacement dP of point P referred to the fixed coordinates system $(\Omega, \xi, \eta, \zeta)$ can always be considered as the resultant of the two displacements dP_1 and dP_2, where the first displacement dP_1 is relative to the mobile coordinate system $(0, x, y, z)$, while the second displacement dP_2 is produced by the displacement of point P considered rigidly connected with the coordinate system $(0, x, y, z)$.

Since

$$P - 0 = y\,\bar{n} + z\,\bar{b} \tag{13}$$

and due to the fact that 0 $\bar{n}$ and $\bar{b}$ in the first displacement dP_1 have to be considered as constants, it follows that

$$dP_1 = dy\,\bar{n} + dz\,\bar{b}\ . \tag{14}$$

The quantity $dx\bar{t}$ represents the displacement of the point 0 [origin of the mobile system of coordinates $(0, x, y, z)$] as a consequence of the displacement of point P.

The instantaneous rigid motion of the system $(0, x, y, z)$ (by assuming 0 as instantaneous center) can be imagined characterized by an elementary translation $dx\bar{t}$ and by an elementary rotation $dx\,\bar{\omega}$, where, in view of *Frenets* formulae

$$\bar{\omega} = -\tau\,\bar{t} + c\,\bar{n}\ . \tag{15}$$

From the fundamental formulae of kinematics of rigid motion, it follows that

$$dP_2 = dx\,[\bar{t} + \bar{\omega} \times (P - 0)]. \tag{16}$$

By substituting for $\bar{\omega}$ and $(P-0)$ the expressions given by equations (13) and (15) one obtains

$$d\,P = d\,P_1 + d\,P_2 = \bar{t}\,(1 - y\,c)\,dx + \bar{n}\,(dy + z\,\tau\,dx) + \bar{b}\,(dz - y\,\tau\,dx)\,. \tag{17}$$

Since the expression for ds^2 is given by

$$ds^2 = dP \cdot dP\,. \tag{18}$$

From equations (17) and (18) the expression for ds^2

$$ds^2 = dP \cdot dP = dx^2\,[(1 - y\,c)^2 + (y\,\tau)^2 + z(\tau)^2] + dy^2 + dz^2 - 2\,y\,\tau\,dx\,dz + 2\,z\,\tau\,dx\,dy \tag{19}$$

follows. If it is supposed that, in a first approximation, the second powers of the quantities (pure numbers) $y\,c$, $z\,c$, $y\,\tau$ and $z\,\tau$ can be neglected, equation (19) becomes

$$ds^2 = dx^2\,(1 - 2\,y\,c) + dy^2 + dz^2 - 2\,y\,\tau\,dx\,dz + 2\,z\,\tau\,dx\,dy\,. \tag{20}$$

The fundamental tensor will in this case be expressed by the metrics[1]

$$\left.\begin{array}{lll} a_{11} = 1 - 2y\,c\,, & a_{12} = 2\,z\,\tau\,, & a_{13} = -\,2\,y\,\tau, \\ a_{21} = 2\,z\,\tau\,, & a_{22} = 1\,, & a_{23} = 0\,, \\ a_{31} = -\,2y\,\tau\,, & a_{32} = 0\,, & a_{33} = 1\,. \end{array}\right\} \tag{21}$$

From which it follows with the same degree of approximation that

$$a = 1 - 2\,y\,c\,, \qquad \sqrt{a} = 1 - y\,c\,. \qquad \frac{1}{\sqrt{a}} = 1 + y\,c\,. \tag{22}$$

In the particular case in which the central axis of the bar is supposed to be a plane curve $\tau = 0$ and equations (20), (21) and (22) become

$$ds^2 = (1 - 2y\,c)\,dx^2 + dy^2 + dz^2\,, \tag{23}$$

$$\left.\begin{array}{lll} a_{11} = 1 - 2\,y\,c\,, & a_{12} = 0\,, & a_{13} = 0\,, \\ a_{21} = 0\,, & a_{22} = 1\,, & a_{23} = 0\,, \\ a_{31} = 0\,, & a_{32} = 0\,, & a_{33} = 1\,, \end{array}\right\} \tag{24}$$

$$a = 1 - 2\,y\,c\,, \qquad \sqrt{a} = 1 - y\,c\,, \qquad \frac{1}{\sqrt{a_{11}}} = 1 + y\,c\,.$$

The components of strain are calculated from the formulae[2]

$$\varepsilon_i = \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{u_i}{\sqrt{a_{ii}}}\right) + \frac{1}{2\,a_{ii}} \sum_{k=1}^{3} \frac{\partial a_{ii}}{\partial x_k}\,\frac{u_k}{\sqrt{a_{kk}}}\,, \tag{25}$$

$$\gamma_{ij} = \frac{1}{\sqrt{a_{ii}\,a_{jj}}}\left[a_{ii}\,\frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{u_i}{\sqrt{a_{ii}}}\right) + a_{jj}\,\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{u_j}{\sqrt{a_{jj}}}\right)\right] \tag{26}$$

$$(u_1 = u\,, \quad u_2 = v\,, \quad u_3 = w\,; \quad x_1 = x\,, \quad x_2 = y\,, \quad x_3 = z)\,.$$

It follows that

$$\left.\begin{array}{l} \varepsilon_x = (1 + y\,c)\left(y\,\dfrac{\partial \lambda_x}{\partial x} + z\,\dfrac{\partial \mu_x}{\partial x} + \dfrac{\partial \nu_x}{\partial x}\right) - c\,(\lambda_y\,y + \mu_y\,z + \nu_y)\,, \\ \varepsilon_y = \lambda_y\,, \\ \varepsilon_z = \mu_z\,, \\ e = \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z = (1 + y\,c)\left(y\,\dfrac{\partial \lambda_x}{\partial x} + z\,\dfrac{\partial \mu_x}{\partial x} + \dfrac{\partial \nu_y}{\partial x}\right) - c\,(\lambda_y\,y + \mu_y\,z + \nu_y) + \lambda_y + \mu_z\,, \\ \gamma_{xy} = (1 + y\,c)\left(y\,\dfrac{\partial \lambda_y}{\partial x} + z\,\dfrac{\partial \mu_y}{\partial x} + \dfrac{\partial \nu_y}{\partial x}\right) + c\,(\lambda_x\,y + \mu_x\,z + \nu_x) + \lambda_x\,, \\ \gamma_{xz} = (1 + y\,c)\left(y\,\dfrac{\partial \lambda_z}{\partial x} + z\,\dfrac{\partial \mu_z}{\partial x} + \dfrac{\partial \nu_z}{\partial x}\right) + \mu_x\,, \\ \gamma_{yz} = \mu_y + \lambda_z\,. \end{array}\right\} \tag{27}$$

[1] The notation used in the text is the same as the one used by *T. Levi-Civita* in his book: The Absolute Differential Calculus, London 1926.

[2] See *A. E. H. Love*, The Mathematical Theory of Elasticity pp. 51 — 58, 4th ed., Cambridge 1934.

4. The equations of motion. The Total Potential Energy of the bar is expressed by

$$U = -\int_V \sqrt{a}\left[\frac{1}{2}\lambda e^2 + G\,(\varepsilon_x^2+\varepsilon_y^2+\varepsilon_z^2) + \frac{G}{2}(\gamma_{xy}^2+\gamma_{yz}^2+\gamma_{zx}^2)\right] dx\,dy\,dz\ , \tag{28}$$

where V is the volume of the bar, λ is *Lames* constant and G the modulus of rigidity of the material of the bar related to *Youngs* modulus E and to *Poissons* ratio ν by the relationships

$$\lambda = \frac{\nu E}{(1+\nu)(1-2\nu)}\,, \qquad G = \frac{E}{2(1+\nu)}\,.$$

By substituting equations (27) into equation (28) and performing the integrations with respect to the variables y and z, calling

$$I_z = \int_A y^2\,dA\ , \qquad I_y = \int_A z^2\,dA$$

the principal moments of inertia of the cross-section of the bar and A the area of the cross-section of the bar.

Since

$$\int_A y\,dA = \int_A z\,dA = 0$$

one obtains the following expression for U:

$$\begin{aligned}
U = -\int_0^l \Big\{ & \left(\frac{\lambda}{2}+G\right) I_z \left(\frac{\partial\lambda_x}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\lambda}{2}+G\right) I_y \left(\frac{\partial\mu_x}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\lambda}{2}+G\right) A \left(\frac{\partial\nu_x}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\lambda}{2}+G\right) A(\lambda_y)^2 \\
& + \left(\frac{\lambda}{2}+G\right) A(\mu_z)^2 + \frac{G}{2} I_z \left(\frac{\partial\lambda_y}{\partial x}\right)^2 + \frac{G}{2} I_y \left(\frac{\partial\mu_y}{\partial x}\right)^2 + \frac{G}{2} A \left(\frac{\partial\nu_y}{\partial x}\right)^2 + \frac{G}{2} A(\lambda_x)^2 \\
& + \frac{G}{2} I_z \left(\frac{\partial\lambda_z}{\partial x}\right)^2 + \frac{G}{2} I_y \left(\frac{\partial\mu_z}{\partial x}\right)^2 + \frac{G}{2} A \left(\frac{\partial\nu_z}{\partial x}\right)^2 + \frac{G}{2} A(\mu_x)^2 + \frac{G}{2} A(\mu_y)^2 \\
& + \frac{G}{2} A(\lambda_z)^2 + \lambda A \lambda_y \frac{\partial\nu_x}{\partial x} + \lambda A \mu_z \frac{\partial\nu_x}{\partial x} + \lambda A \lambda_y \mu_z + G A \mu_x \frac{\partial\nu_z}{\partial x} + G A \mu_y \lambda_z \\
& + (\lambda+2G) I_z c \frac{\partial\lambda_x}{\partial x}\frac{\partial\nu_x}{\partial x} - (\lambda+2G) c I_z \lambda_y \frac{\partial\lambda_x}{\partial x} - (\lambda+2G) I_y c \mu_y \frac{\partial\mu_x}{\partial x} - \lambda A c \lambda_y \nu_y \\
& - \lambda A c \mu_z \nu_y - (\lambda+2G) c A \nu_y \frac{\partial\nu_x}{\partial x} + G I_z c \lambda_x \frac{\partial\lambda_y}{\partial x} + G I_y c \mu_x \frac{\partial\mu_y}{\partial x} + G A c \nu_x \frac{\partial\nu_y}{\partial x} \\
& + G A \lambda_x \frac{\partial\nu_y}{\partial x} + G I_z c \frac{\partial\nu_z}{\partial x}\frac{\partial\lambda_z}{\partial x} + G I_z c \frac{\partial\nu_y}{\partial x}\frac{\partial\lambda_y}{\partial x} + G A c \lambda_x \nu_x \Big\}\, dx\,.
\end{aligned} \tag{29}$$

The Total Kinetic Energy of the bar is expressed by

$$T = \frac{\varrho}{2}\int_V \sqrt{a}\left[\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial t}\right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial t}\right)^2\right] dx\,dy\,dz \tag{30}$$

where ϱ is the density of the material of the bar. By substituting into equation (30) the expressions for the components of the elastic displacement u, v, and w, by performing the integrations over the cross-section of the bar, one obtains for the Total Kinetic Energy of the bar the following expression:

$$\begin{aligned}
T = \frac{\varrho}{2}\int_0^l \Big[& I_z \left(\frac{\partial\lambda_x}{\partial t}\right)^2 + I_y \left(\frac{\partial\mu_x}{\partial t}\right)^2 + A \left(\frac{\partial\nu_x}{\partial t}\right)^2 - 2 I_z c \frac{\partial\nu_x}{\partial t}\frac{\partial\lambda_x}{\partial t} + I_z \left(\frac{\partial\lambda_y}{\partial t}\right)^2 + I_y \left(\frac{\partial\mu_y}{\partial t}\right)^2 + A \left(\frac{\partial\nu_y}{\partial t}\right)^2 \\
& - 2 I_z c \frac{\partial\nu_y}{\partial t}\frac{\partial\lambda_y}{\partial t} + I_z \left(\frac{\partial\lambda_z}{\partial t}\right)^2 + I_y \left(\frac{\partial\mu_z}{\partial t}\right)^2 + A \left(\frac{\partial\nu_z}{\partial t}\right)^2 - 2 I_z c \frac{\partial\nu_z}{\partial t}\frac{\partial\lambda_z}{\partial t} \Big]\, dx\,.
\end{aligned} \tag{31}$$

On the assumption that no external forces (body and surface forces) are applied to the bar, and supposing also, for simplicity sake, that the curvature c of the axis of the bar and the inertia characteristics of the cross-section are constant, by applying *Hamiltons* Principle under the form

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} (U + T)\, dt = 0$$

to the whole bar, supposing the displacements to be zero at t_1 and t_2, one obtains the following nine equations of motion in the nine unknown functions $\lambda_x, \lambda_y, \lambda_z; \mu_x, \mu_y, \mu_z; \nu_x, \nu_y, \nu_z$ of x and t:

$$\left.\begin{aligned}
&(\lambda+2G)\,r_z^2\frac{\partial^2\lambda_x}{\partial x^2}-G\,\lambda_x+(\lambda+2G)\,r_z^2\,c\frac{\partial^2\nu_x}{\partial x^2}-(\lambda+3G)\,c\,r_z^2\frac{\partial\lambda_y}{\partial x}-G\frac{\partial\nu_y}{\partial x}-G\,c\,\nu_x\\
&\qquad=\varrho\,r_z^2\frac{\partial^2\lambda_x}{\partial t^2}-\varrho\,r_z^2\,c\frac{\partial^2\nu_x}{\partial t^2}\,,\\
&G\frac{\partial^2\nu_y}{\partial x^2}+G\frac{\partial\lambda_x}{\partial x}+(\lambda+3G)\,c\frac{\partial\nu_x}{\partial x}+\lambda\,c\mu_z+Gc\,\lambda_y+G\,r_z^2\,c\frac{\partial^2\lambda_y}{\partial x^2}=\varrho\frac{\partial^2\nu_y}{\partial t^2}-\varrho\,r_z^2\,c\frac{\partial^2\lambda_y}{\partial t^2}\,,\\
&G\,r_z^2\frac{\partial^2\lambda_y}{\partial x^2}-(\lambda+2G)\,\lambda_y-\lambda\frac{\partial\nu_x}{\partial x}-\lambda\,\mu_z+(\lambda+3G)\,c\,r_z^2\frac{\partial\lambda_x}{\partial x}+\lambda\,c\,\nu_y+G\,r_z^2\,c\frac{\partial^2\nu_y}{\partial x^2}\\
&\qquad=\varrho\,r_z^2\frac{\partial^2\lambda_y}{\partial t^2}-\varrho\,r_z^2\,c\frac{\partial^2\nu_y}{\partial t^2}\,,\\
&G\,r_y^2\frac{\partial^2\mu_z}{\partial x^2}-\lambda\,\lambda_y-(\lambda+2G)\mu_z-\lambda\frac{\partial\nu_x}{\partial x}+\lambda\,c\,\nu_y=r_y^2\,\varrho\frac{\partial^2\mu_z}{\partial t^2}\,,\\
&(\lambda+2G)\frac{\partial^2\nu_x}{\partial x^2}+\lambda\frac{\partial\lambda_y}{\partial x}+\lambda\frac{\partial\mu_z}{\partial x}+(\lambda+2G)\,r_z^2\,c\frac{\partial^2\lambda_x}{\partial x^2}-G\,c\frac{\partial\nu_y}{\partial x}-(\lambda+2G)\,c\frac{\partial\nu_y}{\partial x}-G\,c\,\lambda_x\\
&\qquad=\varrho\frac{\partial^2\nu_x}{\partial t^2}-\varrho\,r_z^2\,c\frac{\partial^2\lambda_x}{\partial t^2}\,,
\end{aligned}\right\}\tag{32}$$

$$\left.\begin{aligned}
&G\,r_z^2\frac{\partial^2\lambda_z}{\partial x^2}+G\,r_z^2\,c\frac{\partial^2\nu_z}{\partial x^2}-G\,\lambda_z-G\mu_y=\varrho\,r_z^2\frac{\partial^2\lambda_z}{\partial t^2}-r_z^2\,\varrho\,c\frac{\partial^2\nu_z}{\partial t}\,,\\
&G\,r_y^2\frac{\partial^2\mu_y}{\partial x^2}-G\,\mu_y-G\,\lambda_z+(\lambda+3\,G)\,c\,r_y^2\frac{\partial\mu_x}{\partial x}=\varrho\,r_y^2\frac{\partial^2\mu_y}{\partial t^2}\,,\\
&(\lambda+2\,G)\,r_y^2\frac{\partial^2\mu_x}{\partial x^2}-G\,\mu_x-G\frac{\partial\nu_z}{\partial x}-(\lambda+3\,G)\,c\,r_y^2\frac{\partial\mu_y}{\partial x}=\varrho\,r_y^2\frac{\partial^2\mu_x}{\partial t^2}\,,\\
&G\frac{\partial^2\nu_z}{\partial x^2}+G\frac{\partial\mu_x}{\partial x}+G\,r_z^2\,c\frac{\partial^2\lambda_z}{\partial x^2}=\varrho\frac{\partial^2\nu_z}{\partial t^2}-r_z^2\,\varrho\,c\frac{\partial^2\lambda_z}{\partial t^3}
\end{aligned}\right\}\tag{33}$$

with the following boundary conditions at $x=0$, $x=l$:

$$\left.\begin{aligned}
&\left[\frac{\partial\lambda_x}{\partial x}+c\frac{\partial\nu_x}{\partial x}-c\,\lambda_y\right]\delta\,\lambda_x=0\,,\\
&\left[\frac{\partial\nu_y}{\partial x}+r_z^2\,c\frac{\partial\lambda_y}{\partial x}+c\,\nu_x+\lambda_x\right]\delta\,\nu_y=0\,,\\
&\left[\frac{\partial\lambda_y}{\partial x}+c\frac{\partial\nu_y}{\partial x}+c\,\lambda_x\right]\delta\,\lambda_y=0\,,\\
&\left[\frac{\partial\mu_z}{\partial x}\right]\delta\,\mu_z=0\,,\\
&\left[(\lambda+2G)\frac{\partial\nu_x}{\partial x}+(\lambda+2\,G)\,r_z^2\,c\frac{\partial\lambda_x}{\partial x}-(\lambda+2G)\,c\,\nu_y+\lambda\,\lambda_y+\lambda\,\mu_z\right]\delta\,\nu_x=0\,,
\end{aligned}\right\}\tag{34}$$

$$\left.\begin{aligned}
&\left[\frac{\partial\lambda_z}{\partial x}+c\frac{\partial\nu_z}{\partial x}\right]\delta\,\lambda_z=0\,,\\
&\left[\frac{\partial\mu_y}{\partial x}+c\,\mu_x\right]\delta\,\mu_y=0\,,\\
&\left[\frac{\partial\mu_x}{\partial x}-c\,\mu_y\right]\delta\,\mu_x=0\,,\\
&\left[\frac{\partial\nu_z}{\partial x}+\mu_x+c\,r_z^2\frac{\partial\lambda_z}{\partial x}\right]\delta\,\nu_z=0\,.
\end{aligned}\right\}\tag{35}$$

In these equations appear together with the nine unknown functions $\lambda_x, \lambda_y, \lambda_z; \mu_x, \mu_y, \mu_z, \nu_x, \nu_y$ and ν_z the radii of inertia r_y and r_z of the cross-section of the bar, and the curvature c of the axis of the bar which have been supposed, to be constant. However, the more general case in which the curvature of the axis of the bar and the inertia characteristics of the cross-section are functions of the variable x can be dealt with by the use of the same variational principle. As equations (32), (33) (34) and (35) show, during free vibrations of a curved bar the functions $\lambda_x, \lambda_y, \mu_z, \nu_x$ and ν_y;

λ, μ_x, μ_y and v_z are coupled. In the case of straight rods $c = 0$ and the above equations become

$$(\lambda + 2G)\, r_z^2 \frac{\partial^2 \lambda_x}{\partial x^2} - G\,\lambda_x - G\frac{\partial v_y}{\partial x} = \varrho\, r_z^2 \frac{\partial^2 \lambda_x}{\partial t^2}\,, \qquad G\frac{\partial^2 v_y}{\partial x^2} + G\frac{\partial \lambda_x}{\partial x} = \varrho\frac{\partial^2 v_y}{\partial t^2}\,, \tag{36}$$

$$\left.\begin{aligned} G\, r_z^2 \frac{\partial^2 \lambda_y}{\partial x^2} - (\lambda + 2G)\,\lambda_y - \lambda\frac{\partial v_x}{\partial x} - \lambda\,\mu_z &= \varrho\, r_z^2 \frac{\partial^2 \lambda_y}{\partial t^2}\,,\\ G\, r_y^2 \frac{\partial^2 \mu_z}{\partial x^2} - \lambda\,\lambda_y - (\lambda + 2G)\,\mu_z - \lambda\frac{\partial v_x}{\partial x} &= \varrho\, r_z^2 \frac{\partial^2 \mu_z}{\partial t^2}\,,\\ (\lambda + 2G)\frac{\partial^2 v_x}{\partial x} + \lambda\frac{\partial \lambda_y}{\partial x} + \lambda\frac{\partial \mu_z}{\partial x} &= \varrho\frac{\partial^2 v_x}{\partial t^2}\,, \end{aligned}\right\} \tag{37}$$

$$G\, r_z^2 \frac{\partial^2 \lambda_z}{\partial x^2} - G\,\lambda_z - G\,\mu_y = \varrho\, r_z^2 \frac{\partial^2 \lambda_z}{\partial t^2}\,, \qquad G\, r_y^2 \frac{\partial^2 \mu_y}{\partial x^2} - G\,\mu_y - G\,\lambda_z = \varrho\, r_y^2 \frac{\partial^2 \mu_y}{\partial t^2}\,, \tag{38}$$

$$(\lambda + 2G)\, r_y^2 \frac{\partial^2 \mu_x}{\partial x^2} - G\,\mu_x - G\frac{\partial v_z}{\partial x} = \varrho\, r_y^2 \frac{\partial^2 \mu_x}{\partial t^2}\,, \qquad G\frac{\partial^2 v_z}{\partial x^2} + G\frac{\partial \mu_x}{\partial x} = \varrho\frac{\partial^2 v_z}{\partial t^2} \tag{39}$$

with the following boundary conditions at $x = 0$, $x = l$:

$$\left[\frac{\partial \lambda_x}{\partial x}\right]\delta\lambda_x = 0\,, \qquad \left[\frac{\partial v_y}{\partial x} + \lambda_x\right]\delta v_y = 0\,, \tag{40}$$

$$\left[\frac{\partial \lambda_y}{\partial x}\right]\delta\lambda_y = 0\,, \qquad \left[\frac{\partial \mu_z}{\partial x}\right]\delta\mu_z = 0\,, \qquad \left[(\lambda + 2G)\frac{\partial v_x}{\partial x} + \lambda\,\lambda_y + \lambda\,\mu_z\right]\delta v_x = 0\,, \tag{41}$$

$$\left[\frac{\partial \mu_y}{\partial x}\right]\delta\mu_y = 0\,, \qquad \left[\frac{\partial \lambda_z}{\partial x}\right]\delta\lambda_z = 0\,, \tag{42}$$

$$\left[\frac{\partial \mu_x}{\partial x}\right]\delta\mu_x = 0\,, \qquad \left[\frac{\partial v_z}{\partial x} + \mu_x\right]\delta v_z = 0\,. \tag{43}$$

In the case of plane strain, the components u and v of the elastic displacement in the x and y coordinates will be given by

$$u = y\,\lambda_x + v_x\,, \qquad v = y\,\lambda_y + v_y\,, \tag{44}$$

where λ_x, λ_y, v_x and v_y are four functions of the variables x and t (respectively components of the vectors $\bar{\lambda}$ and $\bar{v}$ on the x and y coordinates). x coincides in this case with the central (baricentric) curvilinear axis if the bar, while y coincides with the normal to the central axis of the bar and is directed positively towards the center of curvature. On the assumption of constant curvature c and inertia characteristics of the bar, one obtains the following four equations of motion in the four unknown functions λ_x, λ_y, v_x and v_y of x and t:

$$\left.\begin{aligned} \varrho\, r^2\frac{\partial^2 \lambda_x}{\partial t^2} - r^2\,\varrho\, c\frac{\partial^2 v_x}{dt^2} &= \frac{E}{(1-\nu^2)}\, r^2\frac{\partial^2 \lambda_x}{\partial x^2} - \frac{E}{2\,(1+\nu)}\lambda_x - \frac{E}{2\,(1+\nu)}\frac{\partial v_y}{\partial x} + \frac{E\,c}{(1-\nu^2)}\, r^2\frac{\partial^2 v_x}{\partial x^2}\\ &\quad - \frac{E\,c\,(3-\nu)}{2\,(1-\nu^2)}\, r^2\frac{\partial \lambda_y}{dx} - \frac{Ec}{2\,(1+\nu)}\, v_x\,,\\ \varrho\frac{\partial^2 v_y}{\partial t^2} - r^2\, c\,\varrho\frac{\partial^2 \lambda_y}{\partial t^2} &= \frac{E}{2(1+\nu)}\frac{\partial^2 v_y}{\partial x^2} + \frac{E}{2\,(1+\nu)}\frac{\partial \lambda_x}{\partial x} + \frac{E\,\nu}{(1-\nu^2)}\, c\,\lambda_y + \frac{E}{2\,(1+\nu)}\, r^2\, c\frac{\partial^2 \lambda_y}{\partial x^2}\\ &\quad + \frac{(3-\nu)\,E}{2\,(1-\nu^2)}\, c\frac{\partial v_x}{\partial x}\,,\\ \varrho\frac{\partial^2 v_x}{\partial t^2} - r^2\,\varrho\, c\frac{\partial^2 \lambda_x}{\partial t^2} &= \frac{E}{(1-\nu^2)}\frac{\partial^2 v_x}{\partial x^2} + \frac{E\,\nu}{(1-\nu^2)}\frac{\partial \lambda_y}{\partial x} + \frac{E}{(1-\nu^2)}\, r^2\, c\frac{\partial^2 \lambda_x}{\partial x^2}\\ &\quad - \frac{(3-\nu)\,E}{2\,(1-\nu^2)}\, c\frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{E\,c}{2\,(1+\nu)}\lambda_x\,,\\ \varrho\, r^2\frac{\partial^2 \lambda_y}{\partial t^2} - \varrho\, r^2\, c\frac{\partial^2 v_y}{\partial t^2} &= \frac{E}{2(1+\nu)}\, r^2\frac{\partial^2 \lambda_y}{\partial x^2} - \frac{E}{(1-\nu^2)}\lambda_y - \frac{E\,\nu}{(1-\nu^2)}\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{(3-\nu)\,E}{2\,(1-\nu^2)}\, r^2\, c\frac{\partial \lambda_x}{\partial x}\\ &\quad + \frac{E\,\nu}{(1-\nu^2)}\, c\, v_y + \frac{E}{2\,(1+\nu)}\, r^2\, c\frac{\partial^2 v_y}{\partial x^2} \end{aligned}\right\} \tag{45}$$

with the following boundary conditions at $x = 0$, $x = l$:

$$\left.\begin{aligned} &\left[\frac{\partial \lambda_x}{\partial x} + c\frac{\partial v_x}{\partial x} + c\lambda_y\right]\delta\lambda_x = 0\,, \\ &\left[\frac{\partial v_y}{\partial x} + \lambda_x + r^2 c\frac{\partial \lambda_y}{\partial x} + c v_x\right]\delta v_y = 0\,, \\ &\left[\frac{\partial v_x}{\partial x} + \nu\lambda_y + r^2 c\frac{\partial \lambda_x}{\partial x} - c v_y\right]\delta v_x = 0\,, \\ &\left[\frac{\partial \lambda_y}{\partial x} + c\frac{\partial v_y}{\partial x} + c\lambda_x\right]\delta\lambda_y = 0\,. \end{aligned}\right\} \tag{46}$$

In the case of a straight bar $c = 0$ and the above equations become

$$\left.\begin{aligned} \varrho r^2\frac{\partial^2\lambda_x}{\partial t^2} &= \frac{E}{(1-\nu^2)}r^2\frac{\partial^2\lambda_x}{\partial x^2} - \frac{E}{2(1+\nu)}\lambda_x - \frac{E}{2(1+\nu)}\frac{\partial v_y}{\partial x}\,, \\ \varrho\frac{\partial^2 v_y}{\partial t^2} &= \frac{E}{2(1+\nu)}\frac{\partial^2 v_y}{\partial x^2} + \frac{E}{2(1+\nu)}\frac{\partial\lambda_x}{\partial x}\,. \end{aligned}\right\} \tag{47}$$

$$\left.\begin{aligned} \varrho\frac{\partial^2 v_x}{\partial t^2} &= \frac{E}{(1-\nu^2)}\frac{\partial^2 v_x}{\partial x^2} + \frac{E\nu}{(1-\nu^2)}\frac{\partial\lambda_y}{\partial x}\,, \\ \varrho r^2\frac{\partial^2\lambda_y}{\partial t^2} &= \frac{E}{2(1+\nu)}\frac{\partial^2\lambda_y}{\partial x^2}r^2 - \frac{E}{(1-\nu^2)}\lambda_y - \frac{E\nu}{(1-\nu^2)}\frac{\partial v_x}{\partial x} \end{aligned}\right\} \tag{48}$$

with the following boundary conditions at $x = 0$, $x = l$:

$$\left.\begin{aligned} &\left[\frac{\partial\lambda_x}{\partial x}\right]\delta\lambda_x = 0\,, \\ &\left[\frac{\partial v_y}{\partial x} + \lambda_x\right]\delta v_y = 0\,, \end{aligned}\right\} \tag{49}$$

$$\left.\begin{aligned} &\left[\frac{\partial v_x}{\partial x} + \nu\lambda_y\right]\delta v_x = 0\,, \\ &\left[\frac{\partial\lambda_y}{\partial x}\right]\delta\lambda_y = 0\,. \end{aligned}\right\} \tag{50}$$

(Eingegangen am 28. Februar 1955.)

Anschrift des Verfassers: Prof. *Enrico Volterra*, Troy, New York (USA) Rensselaer Polytechnic Institute. [1]

[1] The material presented in this paper is based on an investigation which is being conducted under the sponsorship of the Office of Naval Research, Department of the U.S. Navy, Washington, D. C.; and is presented with the permission of the Office of Naval Research.

A One-Dimensional Theory of Wave-Propagation in Elastic Rods Based on the „Method of Internal Constraints"

By E. Volterra

1. Introduction. The paper presents a one-dimensional theory of wave propagation in elastic rods which takes into account the effects of shear and of rotatory inertia and which unifies a number of separate engineering treatments of the problem.

The equations of motion which were derived in a previous paper[1] will be used. These equations were obtained by assuming that during motion the sections originally normal to the axis of the bar (x axis) remain plane, or that the following vector equation be verified:

$$\bar{V}(x, y, z; t) = \bar{\nu}(x, t) + y\,\bar{\lambda}(x, t) + z\,\bar{\mu}(x, t)\,. \tag{1}$$

In equation (1) $\bar{V}$ represents the elastic displacement vector at a generic point P of the bar, $\bar{\nu}, \bar{\lambda}$ and $\bar{\mu}$ are three vectors, a priori unknown, functions of the coordinate x and of the time t. The bar is referred to a system of orthogonal cartesian coordinates $(0, x, y, z)$ where x coincides with the axis of the bar, while y and z with the principal axes of inertia of the cross-section of the bar. The equations of motion which, in the case of a straight bar of infinite length, univocally determine the nine functions $\nu_x, \nu_y, \nu_z; \lambda_x, \lambda_y, \lambda_z; \mu_x, \mu_y, \mu_z$ (components of the vectors $\bar{\nu}, \bar{\lambda}$ and $\bar{\mu}$ on the axes $x, y\ z$) are:

$$(\lambda + 2G)\, r_z^2 \frac{\partial^2 \lambda_x}{\partial x^2} - G\,\lambda_x - G\,\frac{\partial \nu_y}{\partial x} = r_z^2 \frac{\partial^2 \lambda_x}{\partial t^2}\,, \qquad G\,\frac{\partial^2 \nu_y}{\partial x^2} + G\,\frac{\partial \lambda_y}{\partial t^2} = \varrho\,\frac{\partial^2 \nu_y}{\partial t^2}\,, \tag{2}$$

$$(\lambda + 2G)\, r_y^2 \frac{\partial^2 \mu_x}{\partial x^2} - G\,\mu_x - G\,\frac{\partial \nu_z}{\partial x} = \varrho\, r_y^2 \frac{\partial^2 \mu_x}{\partial t^2}\,, \qquad G\,\frac{\partial^2 \nu_z}{\partial x^2} + G\,\frac{\partial \mu_x}{\partial x} = \varrho\,\frac{\partial^2 \nu_z}{\partial t^2}\,, \tag{3}$$

$$G\, r_z^2 \frac{\partial^2 \lambda_z}{\partial x^2} - G\,\lambda_z - G\,\mu_y = \varrho\, r_z^2 \frac{\partial^2 \lambda_z}{\partial t^2}\,, \qquad G\, r_y^2 \frac{\partial^2 \mu_y}{\partial x^2} - G\,\mu_y - G\,\lambda_z = \varrho\, r_y^2 \frac{\partial^2 \mu_y}{\partial t^2}\,, \tag{4}$$

$$\left.\begin{aligned} G\, r_z^2 \frac{\partial^2 \lambda_y}{\partial x^2} - (\lambda + 2G)\,\lambda_y - \lambda \frac{\partial \nu_x}{\partial x} - \lambda\,\mu_z &= \varrho\, r_z^2 \frac{\partial^2 \lambda_y}{\partial t^2}\,, \\ G\, r_y^2 \frac{\partial^2 \mu_z}{\partial x^2} - \lambda\,\lambda_y - (\lambda + 2G)\,\mu_z - \lambda \frac{\partial \nu_x}{\partial x} &= \varrho\, r_y^2 \frac{\partial^2 \mu_z}{\partial t^2}\,, \\ (\lambda + 2G)\frac{\partial^2 \nu_x}{\partial x^2} + \lambda \frac{\partial \lambda_y}{\partial x} + \lambda \frac{\partial \mu_z}{\partial x} &= \varrho\,\frac{\partial^2 \nu_x}{\partial t^2}\,. \end{aligned}\right\} \tag{5}$$

In the case of plane strain the equations which determine the four functions $\lambda_x, \lambda_y, \nu_x$ and ν_y are:

$$\left.\begin{aligned} \varrho\, r^2 \frac{\partial^2 \lambda_x}{\partial t^2} &= \frac{E}{(1-\nu^2)}\, r^2 \frac{\partial^2 \lambda_x}{\partial x^2} - \frac{E}{2(1+\nu)}\,\lambda_x - \frac{E}{2(1+\nu)}\,\frac{\partial \nu_y}{\partial x}\,, \\ \varrho\,\frac{\partial^2 \nu_y}{\partial t^2} &= \frac{E}{2(1+\nu)}\,\frac{\partial^2 \nu_y}{\partial x^2} + \frac{E}{2(1+\nu)}\,\frac{\partial \lambda_x}{\partial x}\,, \end{aligned}\right\} \tag{6}$$

$$\left.\begin{aligned} \varrho\,\frac{\partial^2 \nu_x}{\partial t^2} &= \frac{E}{(1-\nu^2)}\,\frac{\partial^2 \nu_x}{\partial x^2} + \frac{E}{(1-\nu^2)}\,\frac{\partial \lambda_y}{\partial x}\,, \\ \varrho\, r^2 \frac{\partial^2 \lambda_y}{\partial t^2} &= \frac{E}{2(1+\nu)}\,\frac{\partial^2 \lambda_y}{\partial x^2}\, r^2 - \frac{E}{(1-\nu^2)}\,\lambda_y - \frac{E}{(1-\nu^2)}\,\frac{\partial \nu_x}{\partial x}\,. \end{aligned}\right\} \tag{7}$$

In the above equations λ is *Lames* constant and G the modulus of rigidity of the material of the bar related to *Youngs* modulus E and to *Poissons* ratio ν by the relationships

$$\lambda = \frac{\nu E}{(1+\nu)(1-2\nu)}\,, \qquad G = \frac{E}{2(1+\nu)}\,.$$

While r_y, r_z and r are the radii of gyration of the cross-section of the bar, ϱ is the density of the material of the bar.

[1] See: Ing.-Arch. 23 (1955) p. 402.

These equations admit a direct treatment of the problem of wave propagation in straight bars of infinite lengths. In fact it is possible to derive from them the frequency equations for flexural, torsional and compressional waves.

The results for flexural waves will be compared with those obtained by the Elementary[1], *Rayleighs*[2], and *Timoshenkos*[3] one-dimensional theories and with those obtained from the exact *Pochhammer* solution[4]. In the case of compressional waves it will be shown that, in the particular case of cylindrical rods, the solution of the problem reduces to the same solution as the one obtained by *Mindlin* and *Herrmann*[5].

2. Flexural Waves. Let the components of the displacement of the bar be

$$u = y\,\lambda_x(x,t)\,, \qquad v = v_y(x,t)\,, \qquad w = 0 \tag{8}$$

or

$$u = z\,\mu_x(x,t)\,, \qquad v = 0\,, \qquad w = v_z(x,t)\,. \tag{9}$$

The motion of the bar will be characterized by equations (2) or (3) respectively or, in the case of plane strain by equations (6). Writing y instead of v_y or v_z, r instead of r_y or r_z equations (2) and (3) can be written as

$$\frac{E}{\varrho}\,\frac{(1-\nu)}{(1+\nu)(1-2\nu)}\,r^2\frac{\partial^4 y}{\partial x^4} - r^2\left(\frac{3-4\nu}{1-2\nu}\right)\frac{\partial^4 y}{\partial x^2\,\partial t^2} + \frac{2(1+\nu)}{E}\,r^2\varrho\,\frac{\partial^4 y}{\partial t^4} + \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = 0\,, \tag{10}$$

while equations (6) can be written as

$$\frac{E}{\varrho}\,\frac{r^2}{(1-\nu^2)}\,\frac{\partial^4 y}{\partial x^4} - r^2\left(\frac{3-\nu}{1-\nu}\right)\frac{\partial^4 y}{\partial x^2\,\partial t^2} + \frac{2(1+\nu)}{E}\,\varrho\,r^2\,\frac{\partial^4 y}{\partial t^4} + \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = 0\,. \tag{11}$$

Let us compare the results given by equations (10) and (11) with the results given by other one-dimensional theories of flexural wave propagation.

The simplest theory of flexural vibrations (Elementary Theory) assumes that the displacement of an element of the bar consists solely of translation perpendicular to the x axis. The corresponding equation of motion is

$$\frac{E}{\varrho}\,r^2\frac{\partial^4 y}{\partial x^4} + \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = 0\,. \tag{12}$$

When the elements of the bar are considered to undergo rotation (without distortion) the term $-r^2\,\partial^4 y/\partial x^2\,\partial t^2$ must be added to equation (12) to take into account the effect of the rotatory inertia of the element. The differential equation (12) is modified to the form usually attributed to *Rayleigh* (*Rayleighs* Theory)

$$\frac{E}{\varrho}\,r^2\frac{\partial^4 y}{\partial x^4} - r^2\,\frac{\partial^4 y}{\partial x^2\,\partial t^2} + \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = 0\,. \tag{13}$$

When the shearing, the rotation and the lateral displacements of the elements of the bar are taken into account, the differential equation takes the form given by *Timoshenko* in 1921 (*Timoshenkos* Theory)[3]

$$\frac{E}{\varrho}\,r^2\,\frac{\partial^4 y}{\partial x^4} - r^2\left[1 + \frac{2(1+\nu)}{K}\right]\frac{\partial^4 y}{\partial x^2\,\partial t^2} + \frac{2(1+\nu)}{E\,K}\,\varrho\,r^2\,\frac{\partial^4 y}{\partial t^4} + \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = 0\,. \tag{14}$$

Prescott[6] in 1942 has derived equation (14) by a different method from that used by *Timoshenko*.

The constant K (*Timoshenkos* Shear Coefficient) which appears in equation (14) is defined as the ratio of the average shear stress on the cross-section to the product of the shear modulus and the angle of shear at the neutral axis and depends both on the shape of the cross-section of the bar and the frequency of vibration.

Professor *R. D. Mindlin*[7] derived for rectangular cross-sections the value of $K = \pi^2/12 = 0{,}822$. Recently Professors *R. D. Mindlin* and *K. Deresiewicz*[8] have determined the coefficient K for the

[1] See *H. Kolsky*, Stress Waves in Solids, Oxford 1953.
[2] See Lord *Rayleigh*, The Theory of Sound, New York, Vol. I, Chapter VIII.
[3] See *S. P. Timoshenko*, Philos. Mag. 41 (1921) p. 744.
[4] See *A. E. H. Love*, The Mathematical Theory of Elasticity paragraphs 199—202 4th ed., Cambridge 1934.
[5] See *R. D. Mindlin* and *G. Herrmann*, Proceedings First National Congress Applied Mechanics Chicago 1951 p. 187.
[6] See *J. Prescott*, Philos. Mag. 23 (1942) p. 703.
[7] See *R. D. Mindlin*, J. Appl. Mech. 18 (1951) p. 31.
[8] See *R. D. Mindlin* and *H. Deresiewicz*, Office of Naval Research, Project NR—064—388, Technical Report No. 10, June 1953.

following cross-sections: circle, ellipse, orthogonal parabolas and a variety of ovaloids and have shown that the values of K computed for these cross-sections all lie within about 10 percent of that for the rectangular cross-section.

In the particular case of a circular cross-section *R. D. Mindlin* finds for K the value $K = 0{,}847$; while *R. M. Davies*[1] uses for the same cross-section the value $K = 0{,}90$.

The problem of flexural vibrations in cylindrical rods of infinite length (Exact Theory) was first investigated in the year 1876 in terms of the general equations of the Mathematical Theory of Elasticity by *L. Pochhammer* and independently in 1889 by *C. Chree*. An outline of this exact theory is discussed by *A. E. H. Love*.

The frequency equation for flexural vibrations which results from this theory was given in determinant form in 1941 by *D. Bancroft*[2] who suggested that it was unlikely to be useful owing to its complexity. However, in 1943 *G. E. Hudson*[3] was able to compute from this equation the values of the phase velocities of flexural waves in a cylindrical bar. Moreover, *Hudson* showed that the frequency equation of flexural waves has only one root and therefore that flexural waves in cylindrical bars unlike compressional and torsional waves can be propagated in only one mode. *Hudsons* results for different values of *Poissons* ratio ν are presented in tabular form for the ratio of phase velocities of flexural waves to the velocity $\left(c_s = \sqrt{G/\varrho}\right)$ of distortional waves in an unbounded medium versus the ratio between the wave-length of distortion waves and the circumference of the cross-section of the bar.

In 1948 *R. M. Davies* by interpolating the values given by *Hudson* for the case of *Poissons* ratio $\nu = 0{,}29$, gave in graphical form the relationships of the ratio c/c_0 of the phase velocity to the velocity of longitudinal waves of infinite wave-length and of the ratio c_g/c_0 of the group velocity to the velocity of longitudinal waves of infinite wave-length of flexural waves in a cylindrical bar versus the ratio a/L of the radius of the cross-section of the bar and the wave-length.

3. The Phase-Velocity of Flexural Waves. Let

$$y(x,t) = A\, e^{i\gamma(x - ct)} \tag{15}$$

where A is a constant, $\gamma = 2\pi/L$, L the wave-length, c the phasevelocity and $i = \sqrt{-1}$. By substituting equation (15) into equation (12) and (13) one finds the following expressions for the phase-velocity: In the Elementary Theory:

$$\frac{c}{c_0} = \frac{2\,r\,\pi}{L}\,, \tag{16}$$

in the *Rayleighs* Theory

$$\frac{c}{c_0} = \frac{1}{\sqrt{1 + \dfrac{L^2}{4\,\pi^2\,r^2}}} \tag{17}$$

where

$$c_0 = \sqrt{\frac{E}{\varrho}}\,.$$

By substituting equation (15) into equations (14), (10) and (11) one finds the following frequency equations: In the *Timoshenkos* Theory

$$x_1^4 - \frac{K + 4\,\pi^2\,\delta^2\,[K + 2\,(1+\nu)]}{8\,(1+\nu)\,\pi^2\,\delta^2}\,x_1^2 + \frac{K}{2\,(1+\nu)} = 0\,, \tag{18}$$

in the Theory based on the „Method of Internal Constraints“:

a) in the case of three-dimensional elasticity

$$x_2^4 - \frac{(1-2\,\nu) + 4\,\pi^2\,\delta^2\,(3-4\,\nu)}{8\,(1-2\,\nu)\,(1+\nu)\,\pi^2\,\delta^3}\,x_2^2 + \frac{1-\nu}{2\,(1+\nu)^2\,(1-2\,\nu)} = 0\,, \tag{19}$$

b) in the case of two-dimensional elasticity

$$x_3^4 - \frac{1 + 4\,\pi^2\,\delta^2\left(\dfrac{3-\nu}{1-\nu}\right)}{8\,(1-\nu)\,\pi^2\,\delta^2}\,x_3^2 + \frac{1}{2\,(1-\nu)^3} = 0\,. \tag{20}$$

---

[1] See *R. M. Davies*, Philos. Trans. Royal Soc. London 240 (1948) p. 375.
[2] See *D. Bancroft*, Physical Review 59 (1941) p. 588.
[3] See *G. E. Hudson*, Physical Review 63 (1943) p. 46.

In equations (18), (19) and (20)

$$x = \frac{c}{c_0}, \qquad \delta = \frac{r}{L}.$$

The frequency equations (19) and (20) like the frequency equation (18) are quadratic equations in $x^2 = (c/c_0)^2$ the roots of which are real, the greater giving values of x greater than unity (and therefore corresponding values of $c > c_0$) while the smaller roots giving values of x less than unity (and therefore corresponding values of $c < c_0$). Since the larger roots do not appear to have any physical significance, they will be ignored. In fact, as already pointed out in the previous paragraph, *Hudson* has shown that the root x of the flexural waves in the Exact Theory is a single valued function of δ.

From equation (18) one sees that for large values of δ, x_1 approaches asymptotically the value[1]

$$x_1 = \frac{c}{c_0} \quad \to \quad \sqrt{\frac{K}{2(1+\nu)}}. \tag{21}$$

While from equations (19) and (20) one sees that for large values of δ the roots x_2 and x_3 approach asymptotically the values

$$x_2 = \frac{c}{c_0} \quad \to \quad \sqrt{\frac{1}{2(1+\nu)}}, \tag{22}$$

$$x_3 = \frac{c}{c_0} \quad \to \quad \sqrt{\frac{1}{2(1-\nu)}}. \tag{23}$$

In Tables 1, 2 and 3 the values of the roots x_1, x_2 and x_3 of equations (18), (19) and (20) are given for the following values of the parameters ν and δ:

$$\nu = 0.0;\ 0.05;\ 0.10;\ 0.15;\ 0.20;\ 0.25;\ 0.30;\ 0.35;\ 0.40,$$
$$\delta = 0.01;\ 0.05;\ 0.10;\ 0.50;\ 0.1.00;\ 2.00;\ 3.00;\ 6.00;\ 10.00;\ \infty.$$

Table 1. *Phase velocities for flexural waves according to Timoshenkos Theory* $\left(k = \frac{8}{9}\right)$.

δ \ ν	0.00	0.05	0.10	0.15	0.20	0.25	0.30	0.35	0.40
0.01	0.063	0.063	0.063	0.063	0.063	0.063	0.063	0.063	0.063
0.05	0.2751	0.2740	0.2729	0.2719	0.2708	0.2698	0.2687	0.2678	0.2667
0.10	0.4318	0.4278	0.4240	0.4201	0.4165	0.4129	0.4093	0.4059	0.4025
0.50	0.6425	0.6287	0.6157	0.6034	0.5917	0.5807	0.5702	0.5603	0.5509
1.00	0.6601	0.6447	0.6303	0.6168	0.6041	0.5922	0.5809	0.5703	0.5602
2.00	0.6650	0.6491	0.6343	0.6204	0.6075	0.5952	0.5837	0.5729	0.5626
3.00	0.6659	0.6499	0.6350	0.6211	0.6081	0.5958	0.5843	0.5734	0.5631
6.00	0.6665	0.6504	0.6355	0.6215	0.6084	0.5962	0.5846	0.5737	0.5634
10.00	0.6666	0.6505	0.6356	0.6216	0.6085	0.5962	0.5847	0.5737	0.5634
∞	0.6667	0.6506	0.6356	0.6217	0.6086	0.5963	0.5847	0.5738	0.5634

Table 2. *Phase velocities for flexural waves according to Three-Dimensional Theory of Internal Constraints.*

δ \ ν	0.00	0.05	0.10	0.15	0.20	0.25	0.30	0.35	0.40
0.01	0.063	0.065	0.065	0.066	0.066	0.068	0.072	0.079	0.091
0.05	0.2776	0.2772	0.2782	0.2809	0.2858	0.2936	0.3059	0.3251	0.3574
0.10	0.4409	0.4380	0.4367	0.4373	0.4402	0.4458	0.4553	0.4698	0.4919
0.50	0.6762	0.6624	0.6497	0.6381	0.6273	0.6254	0.6082	0.5996	0.5917
1.00	0.6985	0.6825	0.6676	0.6537	0.6407	0.6285	0.6171	0.6063	0.5961
2.00	0.7049	0.6881	0.6720	0.6579	0.6443	0.6324	0.6194	0.6080	0.5972
3.00	0.7061	0.6892	0.6734	0.6587	0.6450	0.6324	0.6198	0.6083	0.5974
6.00	0.7068	0.6898	0.6740	0.6592	0.6454	0.6324	0.6201	0.6085	0.5976
10.00	0.7069	0.6900	0.6741	0.6593	0.6455	0.6324	0.6201	0.6086	0.5976
∞	0.7071	0.6901	0.6742	0.6594	0.6455	0.6324	0.6202	0.6086	0.5976

In computing Table 1 the value $K = 8/9$ has been assumed for *Timoshenkos* Shear Coefficient. This is the value given by Professor *S. P. Timoshenko*[2] using the experimental values of *L. N. G. Filon*[3]. In figure 1 the ratio c/c_0 between phase velocities of flexural waves in cylindrical bars and

[1] See *R. M. Davies*, Philos. Trans. Royal Soc. London 240 (1948) p. 375.
[2] See *S. P. Timoshenko*, Philos. Mag. 43 (1922) p. 125.
[3] See *A. E. H. Love*, l. c. paragraph 245.

Table 3. *Phase velocities for flexural waves according to Two-Dimensional Theory of Internal Constraints.*

δ \ ν	0.00	0.05	0.10	0.15	0.20	0.25	0.30	0.35	0.40
0.01	0.063	0.067	0.071	0.074	0.077	0.084	0.087	0.095	0.105
0.05	0.2776	0.2911	0.3060	0.3225	0.3409	0.3615	0.3848	0.4113	0.4428
0.10	0.4409	0.4600	0.4809	0.5037	0.5289	0.5568	0.5878	0.6268	0.6619
0.50	0.6762	0.6963	0.7178	0.7410	0.7661	0.7927	0.8236	0.8568	0.8940
1.00	0.6985	0.7175	0.7379	0.7600	0.7840	0.8104	0.8395	0.8718	0.9080
2.00	0.7049	0.7234	0.7434	0.7652	0.7889	0.8150	0.8437	0.8757	0.9116
3.00	0.7061	0.7246	0.7445	0.7662	0.7897	0.8158	0.8445	0.8764	0.9123
6.00	0.7069	0.7252	0.7451	0.7668	0.7904	0.8163	0.8450	0.8769	0.9127
10.00	0.7070	0.7254	0.7453	0.7669	0.7905	0.8164	0.8451	0.8770	0.9129
∞	0.7071	0.7255	0.7454	0.7670	0.7906	0.8165	0.8452	0.8771	0.9129

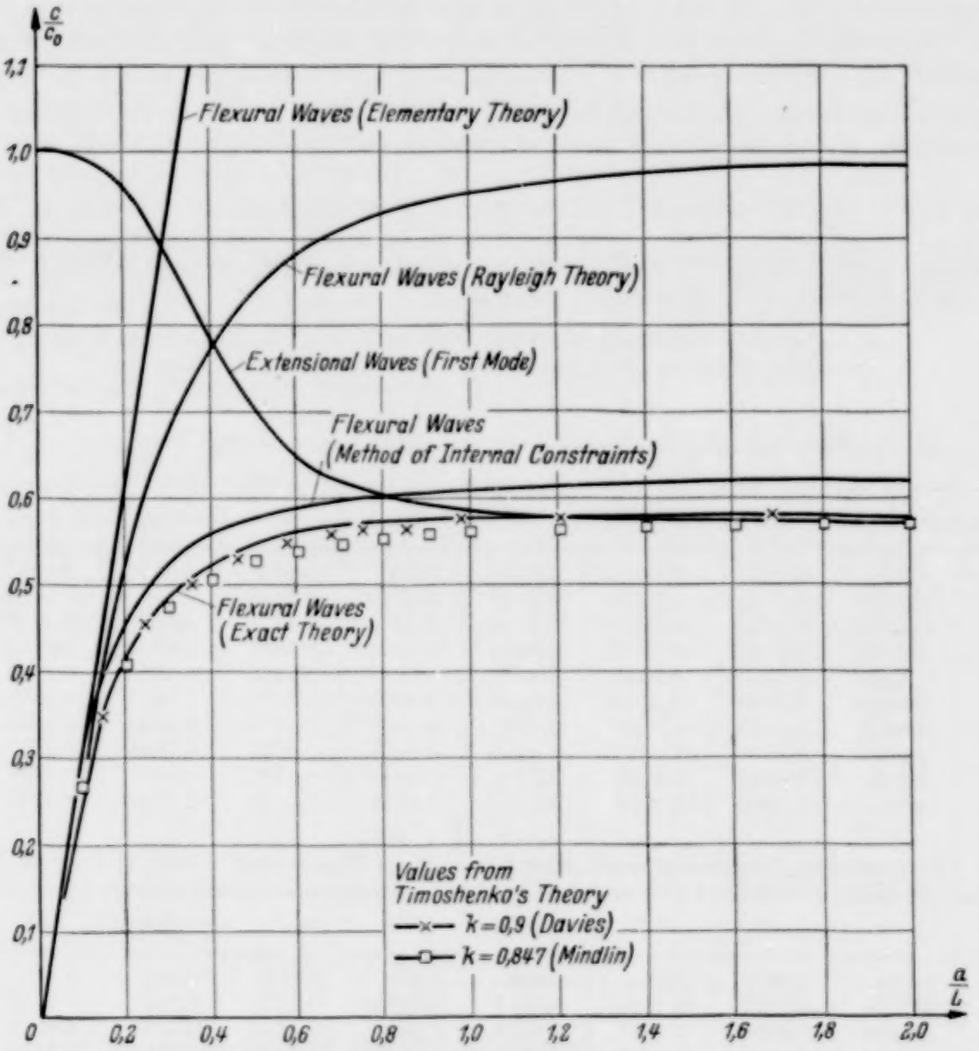


Fig. 1. Phase velocity of flexural waves in cylindrical bars ($\nu = 0{,}29$).

velocity of longitudinal waves of infinite wave-length are given versus the ratio a/L between radius of the cross-section of the bar and wave-length in the case in which $\nu = 0{,}29$.

The curves obtained from the Elementary Theory [equation (16)], from the *Rayleighs* Theory [equation (17)], from the *Timoshenkos* Theory [equation (18)] and the results obtained from equation (19) as well as the curve for the first mode of extensional waves are compared with the results obtained by *R. M. Davies* interpolating the values given by *Hudson* from the Exact Theory.

In fig. 1 the results from *Timoshenkos* Theory are given as a series of points, the crosses representing the values of the roots x_1 computed by assuming $K = 0{,}9$ (according to *R. M. Davies*) while the squares representing the values of the roots x_1 computed by assuming $K = 0{,}847$ (according to *R. D. Mindlin*). As fig. 1 shows, for wave-lengths greater than about ten times the radius of the bar

($a/L \leqq 0{,}10$) all four theories of flexural waves propagation give approximately the same results. For increasing values of the ratio a/L the values of c/c_0 given by the Elementary Theory and by the *Rayleighs* Theory are greater than those given by the Exact Theory. When $\delta \to \infty$ the phase velocity becomes infinite in the Elementary Theory and equal to c_0 in the *Rayleighs* Theory whereas in the Exact Theory it becomes equal to $c_g = 0{,}5764$ the velocity of *Rayleighs* surface waves.

Instead in the *Timoshenkos* Theory the limiting values of $x_1 = c/c_0$ (for $\nu = 0{,}29$) are $c/c_0 = \sqrt{K/2\,(1+\nu)}$ and therefore for $K = 0{,}9$: $c/c_0 = 0{,}5906$, for $K = 0{,}847$: $c/c_0 = 0{,}5730$.

In the three-dimensional Theory based on the „Method of Internal Constraints" the limiting value of $x_2 = c/c_0 = 1/2\,(1+\nu)$, and therefore $c/c_0 = 0{,}6226$.

4. The Group-Velocity of Flexural Waves. The velocity with which the energy of a pulse is propagated is called its group velocity c_g and is given in terms of the phase velocity c and the wave-length L by the equation

$$c_g = c - L\frac{dc}{dL}$$

or by

$$c_g = c + \delta\frac{dc}{d\delta} = c + \delta_1\frac{dc}{d\delta_1} \tag{21}$$

where

$$\delta = \frac{r}{L}\,, \qquad \delta_1 = \frac{a}{L}\,.$$

From equation (21) it follows that the group velocity of flexural waves is:

in the Elementary Theory:

$$c_g = c + \frac{2\pi c_0 r}{L} = 2c\,, \tag{22}$$

in the *Rayleighs* Theory:

$$c_g = c_0\frac{1 + \dfrac{1}{1 + 4\pi^2 r^2/L^2}}{\sqrt{1 + \dfrac{L^2}{4\pi^2 r^2}}}\,, \tag{23}$$

in the *Timoshenkos* Theory:

$$c_g = c\left\{1 + \frac{1}{1 + 4\pi^2\delta^2\left[1 + \dfrac{2(1+\nu)}{K} - \dfrac{4(1+\nu)}{K}\left(\dfrac{c}{c_0}\right)^2\right]}\right\}. \tag{24}$$

The Theory of wave propagation based on the method of „Internal Constraints" gives for the group-velocity of flexural waves the following expressions[1]:

a) in three-dimensional elasticity:

$$c_g = c\left\{1 + \frac{1}{1 + 4\pi^2\delta^2\left[\left(\dfrac{3-4\nu}{1-2\nu}\right) - 4(1+\nu)\left(\dfrac{c}{c_0}\right)^2\right]}\right\}, \tag{25}$$

---

[1] Equations (25) and (26) can be derived from the frequency equations (19) and (20). In fact writing these equations under the form

$$x^4 - y(\delta)\,x^2 + C = 0\,. \tag{27}$$

Where C is a constant and differentiating equation (27) with respect to δ one obtains

$$4x^3\frac{dx}{d\delta} - x^3\frac{dy(\delta)}{d\delta} - 2x\frac{dx}{d\delta}\,y(\delta) = 0$$

or

$$\frac{dx}{d\delta} = \frac{x}{4x^2 - 2\,y(\delta)}\,\frac{dy(\delta)}{d\delta}$$

and in view of equation (21):

$$\frac{c_g}{c_0} = x + \delta\frac{dx}{d\delta} = x\left[1 + \frac{\delta\dfrac{dy(\delta)}{d\delta}}{4x^2 - 2\,y(\delta)}\right]$$

from which equations (25) and (26) immediately follow.

b) in two-dimensional elasticity:

$$c_g = c\left\{1 + \frac{1}{1 + 4\pi^2\delta^2\left[\left(\frac{3-\nu}{1-\nu}\right) - 4(1-\nu)\left(\frac{c}{c_0}\right)^2\right]}\right\}. \tag{26}$$

Equation (25) becomes in the case of a cylindrical bar of radius a

$$c_g = c\left\{1 + \frac{1}{\left[1 + \frac{(3-4\nu)\pi^2\delta_1^2}{(1-2\nu)} - 4(1+\nu)\pi^2\delta_1^2\left(\frac{c}{c_0}\right)^2\right]}\right\}. \tag{28}$$

As equations (25) and (28) show, when

$$\delta = \delta_1 \to 0: \quad c_g \to 2c,$$

when

$$\delta = \delta_1 \to \infty: \quad c_g = c.$$

The same applies in the *Timoshenkos* Theory.

In Tables 4, 5 and 6 the values of the group velocities c_g derived from equations (24), (25) and (26) are given for the following values of the parameters ν and δ:

$$\nu = 0.0;\ 0.05;\ 0.10;\ 0.15;\ 0.20;\ 0.25;\ 0.30;\ 0.35;\ 0.40,$$
$$\delta = 0.01;\ 0.05;\ 0.10;\ 0.50;\ 1.00;\ 2.00;\ 3.00;\ 6.00;\ 10.00;\ \infty.$$

In computing Table 4 the value $K = 8/9$ has been assumed for *Timoshenkos* Shear Coefficient.

Table 4. *Group velocities for flexural waves according to Timoshenko's Theory.*

δ \ ν	0.00	0.05	0.10	0.15	0.20	0.25	0.30	0.35	0.40
0.01	0.125	0.125	0.125	0.125	0.125	0.125	0.125	0.125	0.125
0.05	0.4888	0.4853	0.4818	0.4785	0.4750	0.4718	0.4684	0.4654	0.4620
0.10	0.6530	0.6432	0.6338	0.6244	0.6157	0.6071	0.5986	0.5905	0.5826
0.50	0.6861	0.6686	0.6524	0.6373	0.6231	0.6099	0.5974	0.5857	0.5748
1.00	0.6728	0.6562	0.6407	0.6263	0.6128	0.6002	0.5883	0.5772	0.5667
2.00	0.6683	0.6521	0.6370	0.6229	0.6098	0.5973	0.5856	0.5747	0.5642
3.00	0.6674	0.6512	0.6362	0.6222	0.6091	0.5967	0.5851	0.5742	0.5638
6.00	0.6669	0.6507	0.6358	0.6218	0.6086	0.5964	0.5848	0.5739	0.5636
10.00	0.6667	0.6506	0.6357	0.6217	0.6086	0.5963	0.5848	0.5738	0.5635
∞	0.6667	0.6506	0.6356	0.6217	0.6086	0.5963	0.5847	0.5738	0.5634

Table 5. *Group velocities for flexural waves according to Three-Dimensional Theory of Internal Constraints.*

δ \ ν	0.00	0.05	0.10	0.15	0.20	0.25	0.30	0.35	0.40
0.01	0.125	0.129	0.129	0.131	0.131	0.135	0.143	0.156	0.180
0.05	0.4969	0.4946	0.4943	0.4965	0.5018	0.5107	0.5250	0.5462	0.5780
0.10	0.6757	0.6673	0.6604	0.6553	0.6518	0.6497	0.6490	0.6481	0.6443
0.50	0.7301	0.7114	0.6938	0.6771	0.6611	0.6549	0.6312	0.6170	0.6034
1.00	0.7150	0.6971	0.6805	0.6648	0.6497	0.6363	0.6232	0.6108	0.5991
2.00	0.7093	0.6920	0.6753	0.6608	0.6467	0.6344	0.6210	0.6091	0.5980
3.00	0.7081	0.6909	0.6749	0.6600	0.6461	0.63333	0.6205	0.6088	0.5977
6.00	0.7073	0.6902	0.6743	0.6595	0.6457	0.6326	0.6203	0.6086	0.5977
10.0	0.7071	0.6902	0.6742	0.6594	0.6456	0.6325	0.6202	0.6086	0.5976
∞	0.7071	0.6901	0.6742	0.6594	0.6455	0.6324	0.6202	0.0086	0.5976

Table 6. *Group velocities for flexural waves according to Two-Dimensional Theory of Internal Constraints.*

δ \ ν	0.00	0.05	0.10	0.15	0.20	0.25	0.30	0.35	0.40
0.01	0.125	0.133	0.141	0.147	0.153	0.167	0.173	0.188	0.208
0.05	0.4969	0.5195	0.5442	0.5713	0.6014	0.6347	0.6720	0.7140	0.7634
0.10	0.6757	0.7010	0.7283	0.7577	0.7897	0.8244	0.8624	0.9109	0.9502
0.50	0.7301	0.7480	0.7673	0.7883	0.8111	0.8354	0.8641	0.8950	0.9300
1.00	0.7150	0.7330	0.7524	0.7736	0.7967	0.8223	0.8506	0.8822	0.9177
2.00	0.7093	0.7275	0.7472	0.7687	0.7922	0.8181	0.8466	0.8784	0.9141
3.00	0.7081	0.7264	0.7462	0.7678	0.7912	0.8172	0.8458	0.8776	0.9134
6.00	0.7074	0.7257	0.7455	0.7672	0.7908	0.8166	0.8453	0.8772	0.9130
10.00	0.7072	0.7256	0.7454	0.7670	0.7906	0.8165	0.8452	0.8771	0.9130
∞	0.7071	0.7255	0.7454	0.7670	0.7906	0.8165	0.8452	0.8771	0.9129

In fig. 2, which, like fig. 1 was derived from Professor *R. M. Davies* paper, the ratio c_g/c_0 between group velocity of flexural waves in a cylindrical bar and of the velocity of longitudinal waves of infinite wave-length are given versus the ratio a/L of the radius of the cross-section of the bar and the wave-length in the case in which $\nu = 0{,}29$.

The curves obtained from the Elementary Theory [equation (22)], from the *Rayleigh*s Theory [equation (23)], from the *Timoshenko*s Theory [equations (24)], and the results obtained from the „Method of Internal Constraints" [equation (28)], as well as the curve for the first mode of extensional waves are compared with those obtained from the Exact Theory by *Hudson* and *Davies*. As before, the results from *Timoshenko*s Theory are given as a series of points, the crosses representing

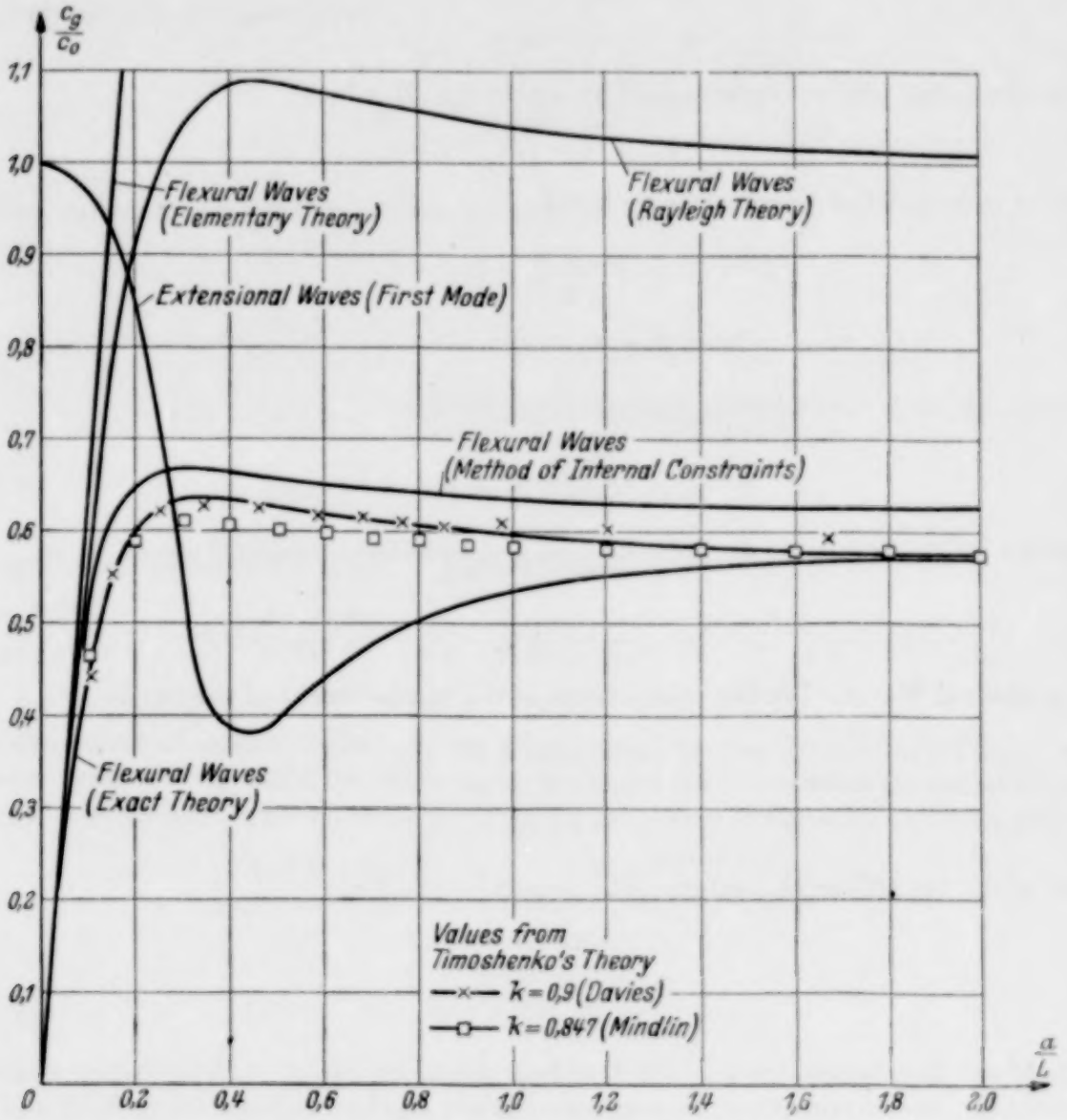


Fig. 2. Group velocity of flexural waves in cylindrical bars ($\nu = 0{,}29$).

the values of the ratios c_g/c_0 computed by assuming $K = 0{,}9$ (according to *R. M. Davies*) while the squares representing the values of the ratios c_g/c_0 computed by assuming $K = 0{,}847$ (according to *R. D. Mindlin*). As fig. 2 shows, for wave-lengths greater than about ten times the radius of the bar ($a/L \leqq 0{,}10$) all four theories give very closely the same results. For increasing values of the ratio a/L the Elementary Theory and *Rayleigh*s Theory give values of c_g/c_0 greater than those given by the Exact Theory and when the ratio $a/L \to \infty$ the Elementary Theory gives an infinite value for the group velocity while the *Rayleigh*s Theory gives $c_g = c_0$.

Instead in the Theory of Internal Constraints as well as in the *Timoshenko*s Theory to large values of the ratio a/L correspond values of the group velocities equal to the values of the corresponding phase velocities.

The Exact Theory predicts that the group velocity will have a maximum for $a = 0{,}3\,L$. This implies that when a flexural pulse is propagated along a bar, *Fourier*s components whose wave-

lengths are about three times that of the radius of the bar will travel ahead of the components having other wave-lengths, and will therefore appear at the head of the pulse [1].

The same applies for flexural pulses according to the „Theory of Internal Constraints". In fact, as fig. 2 shows the maximum value of the ratio c_g/c_0 given by the approximate theory occurs at $a/L = 0{,}3$. This good agreement between the results given by the approximate theory presented here and the exact theory is perhaps the most interesting feature of fig. 2.

5. Torsional Waves. Consider a bar with a circular cross-section and let the components of the displacement be

$$\left.\begin{aligned} v &= z\,\mu_y = -\omega\, z\,, \\ w &= y\,\lambda_z = \omega\, y\,. \end{aligned}\right\} \tag{29}$$

The motion of the bar will be characterized by equations (4), where

$$-\mu_y = \lambda_z = \omega\,, \quad r_y = r_z\,.$$

In fact, since in cylindrical coordinates u_r and u_Θ

$$u_r = v\cos\Theta + w\sin\Theta = (\mu_y + \lambda_z)\frac{y\,z}{r} = 0\,,$$

$$u_\Theta = -v\sin\Theta + w\cos\Theta = -\mu_y\frac{z^2}{r} + \lambda_z\frac{y^2}{r} = \omega\, r$$

the condition $-\mu_y = \lambda_z = \omega$ follows. Equations (4) become

$$G\frac{\partial^2\omega}{\partial x^2} = \varrho\,\frac{\partial^2\omega}{\partial t^2}\,. \tag{30}$$

From equation (30) it follows for the velocity c_e of propagation of torsional waves

$$c_e = \sqrt{\frac{G}{\varrho}}\,.$$

6. Compressional Waves. Let the components of the displacement of the bar be

$$\left.\begin{aligned} u &= v_x(x,t)\,, \\ v &= y\,\lambda_y(x,t)\,, \\ w &= z\,\mu_z(x,t)\,. \end{aligned}\right\} \tag{31}$$

The motion of the bar will be characterized by equations. (5) Let

$$\left.\begin{aligned} v_x &= N\,e^{i\gamma(x-ct)}\,, \\ \lambda_y &= L\,e^{i\gamma(x-ct)}\,, \\ \mu_z &= M\,e^{i\gamma(x-ct)} \end{aligned}\right\} \tag{32}$$

where N, L, M are three constants $\gamma = 2\pi/L$ and c is the wave-velocity. Substituting equations (32) into equations (5), one obtains three homogeneous linear algebraic equations in N, L and M whose determinant set equal to zero, yields the following frequency equation:

$$\left.\begin{aligned} -x^6 + x^4\left(4 + \frac{\alpha+2}{r_x^2\gamma^2} + \frac{\alpha+2}{r_y^2\gamma^2} + \alpha\right) - x^2\left(\frac{5\alpha+6}{r_x^2\gamma^2} + \frac{5\alpha+6}{r_y^2\gamma^2} + \frac{4\alpha+4}{r_x^2 r_y^2\gamma^4} + 2\alpha + 5\right) \\ + 4\left(\frac{1+\alpha}{r_x^2\gamma^2} + \frac{1+\alpha}{r_y^2\gamma^2} + \frac{3\alpha+2}{r_x^2 r_y^2\gamma^4}\right) + \alpha + 2 = 0\,. \end{aligned}\right\} \tag{33}$$

In equation (33)

$$x = \frac{c}{c_e}\,, \qquad c_e = \sqrt{\frac{G}{\varrho}}\,, \qquad \alpha = \frac{\lambda}{G}\,.$$

If the bar has a circular cross-section of radius a, then

$$\lambda_y = \mu_z\,. \tag{34}$$

[1] See *H. Kolsky*, l. c.

In fact, since in cylindrical coordinates u_r and u_Θ

$$\left.\begin{aligned} u_r &= v\cos\Theta + w\sin\Theta = \lambda_y \frac{y^2}{r} + \mu_z \frac{z^3}{r}\,, \\ u_\Theta &= -v\sin\Theta + w\cos\Theta = (-\lambda_y + \mu_z)\, x\, y \end{aligned}\right\} \tag{35}$$

and since

$$u_\Theta = 0$$

equations (34) follows, and the first of equations (35) can be written

$$u_r = \lambda_y\, r\,.$$

Instead of equations (31) the equations

$$\left.\begin{aligned} u &= W(x,t) = v_x(x,t)\,, \\ u_r &= \frac{r}{a}\, U(x,t) = \lambda_y\, r \end{aligned}\right\} \tag{36}$$

will be used.

Substituting equations (36) into equations (5) with

$$r_y^2 = r_z^2 = \frac{a^2}{4}$$

equations (5) reduce to Professors *Mindlin* and *Herrmanns* equations[1]

$$\left.\begin{aligned} -8(\lambda + G)\, U - 4\, a\lambda \frac{\partial W}{\partial x} + G a^2 \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} &= \varrho\, a^2 \frac{\partial^2 U}{\partial t^2}\,, \\ 2\, a\lambda \frac{\partial U}{\partial x} + a^2(\lambda + 2G) \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} &= \varrho\, a^2 \frac{\partial^2 W}{\partial t^2}\,. \end{aligned}\right\} \tag{37}$$

By eliminating U from equations (37) the single equation in W

$$-\frac{\partial^2 W}{\partial t^2} + \frac{E}{\varrho}\frac{\partial^2 W}{\partial x^2} + (3 - 4\nu)\frac{a^2}{8}\frac{\partial^4 W}{\partial x^2\,\partial t^2} - \frac{a^2}{8\varrho}\frac{E(1-\nu)}{(1+\nu)}\frac{\partial^4 W}{\partial x^4} - \frac{(1+\nu)(1-2\nu)\varrho\, a^2}{4E}\frac{\partial^4 W}{\partial t^4} = 0 \tag{38}$$

is obtained.

The first two terms of equation (38) are the terms given by the Elementary Theory of compressional waves propagation while the other three terms are the corrections for radial inertia and radial shear. The frequency equation corresponding to the waves defined by equation (38) is

$$x^4 - \frac{1 + 2(3-4\nu)\pi^2\delta^2}{4(1+\nu)(1-2\nu)\pi^2\delta^2}\, x^2 + \frac{1 + 2\pi^2\delta^2(1-\nu)}{4(1+\nu)(1-2\nu)\pi^2\delta^2} = 0 \tag{39}$$

where

$$x = \frac{c}{c_0}\,, \qquad c_0 = \sqrt{\frac{E}{\varrho}}\,, \qquad \delta = \frac{r}{L}\,.$$

In order to discuss the problem of compressional waves in the case of plane strain, let the components of the displacement be

$$\left.\begin{aligned} u &= v_x(x,t)\,, \\ v &= y\,\lambda_y(x,t)\,. \end{aligned}\right\} \tag{40}$$

The motion of the bar will be characterized by equations (7). By eliminating λ_y in equations (7) one obtains the single equation

$$-\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \frac{E}{\varrho}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \varrho\, r^2 \frac{(1-\nu^2)}{E}\frac{\partial^4 u}{\partial t^4} - \frac{E}{2(1+\nu)\varrho}\, r^2 \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} + \frac{(3-\nu)}{2}\, r^2 \frac{\partial^4 u}{\partial x^2\,\partial t^2} = 0\,. \tag{41}$$

The frequency equation corresponding to equation (41) is

$$x^4 - \frac{1 + 2\pi^2\delta^2(3-\nu)}{4\pi^2\delta^2(1-\nu^2)}\, x^2 + \frac{1 + \dfrac{2\pi^2\delta^2}{1+\nu}}{4\pi^2\delta^2(1-\nu^2)} = 0\,. \tag{42}$$

[1] See *R. D. Mindlin* and *G. Herrmann*, l. c.

7. Conclusions. The results obtained in this paper in the particular case of lateral vibrations of bars show an encouraging agreement between the values of c/c_0 and c_g/c_0 given by the approximate theory based on the assumption of internal constraints and the exact theory derived from the use of the equations of the Mathematical Theory of Elasticity.

This approximate theory which will be referred to as the „Theory of Internal Constraints" is in the dynamic case completely contained in the constraint equation (1) and in the application of *Hamiltons* Principle. Accordingly the concept of Shear Coefficient is not used. In the general case of wave propagation in elastic straight rods this theory unifies a number of separate engineering treatments of the problem. Moreover, the same theory can be applied to the study of vibrations of curved bars taking into account the effects of shear and of rotatory inertia as has been shown in a previous paper.

The mathematical simplicity of the theory and its degree of accuracy justify its use in dealing with engineering problems in vibrations of curved or straight bars for which more exact theories cannot be used because of their mathematical complexities.

The author wants to express his best thanks to Mr. *E. C. Zachmanoglou*, student in the Department of Aeronautical Engineering, and to Mr. *R. V. Milligan*, graduate student in the Department of Mechanics, at Rensselaer Polytechnic Institute for the valuable help and assistance given to him in the preparation of the numerical tables and graphs which are presented in this paper.

(Eingegangen am 28. Februar 1955.)

Anschrift des Verfassers: Prof. *Enrico Volterra*, Troy, New York (USA) Rensselaer Polytechnic Institute.[1]

[1] The material presented in this paper is based on an investigation which is being conducted under the sponsorship of the Office of Naval Research, Department of the U. S. Navy, Washington, D. C.; and is presented with the permission of the Office of Naval Research.

Beitrag zur Theorie der elastischen Ringe mit Berücksichtigung der Wölbbehinderung

Von **A. Björklund**

1. Einleitung. Die Theorie der stark gekrümmten offenen oder geschlossenen Kreisringe mit beliebigem Querschnitt und allgemein formulierten Belastungsannahmen ist schon früher von *F. K. G. Odqvist* [1] behandelt worden. Im folgenden wird diese Theorie soweit erweitert, daß auch auf die Einwirkung der Querschnittsverwölbung bei Torsion Rücksicht genommen werden kann. Beim Aufstellen der Verformungshypothesen und der Grundgleichungen ist vorausgesetzt, daß, da eine exakte Theorie für den gekrümmten Balken fehlt, die für die Verdrehung des geraden Balkens geltende Theorie [2, 3], mit gewissen Änderungen auch in diesem Falle angewandt werden kann. Die erhaltenen Ergebnisse sind also — besonders bei starker Krümmung — nur als eine erste Näherung anzusehen. Eine Durchrechnung von praktischen Beispielen zeigt jedoch, daß man durch Berücksichtigung der Querschnittsverwölbung oft erhebliche Abweichungen bei den berechneten Verformungen und Spannungen gegenüber den Werten ohne Berücksichtigung der Verwölbung [1] erhält. Dies gilt hauptsächlich für offene Profile. Bei völlig geschlossenen Querschnitten dürfte die Wölbwirkung, ebenso wie beim geraden Balken, im allgemeinen wohl keine praktische Bedeutung haben.

Um einen Vergleich mit der *Odqvist*schen Lösung zu erleichtern, schließt sich die folgende Darstellung dieser soweit wie möglich an.

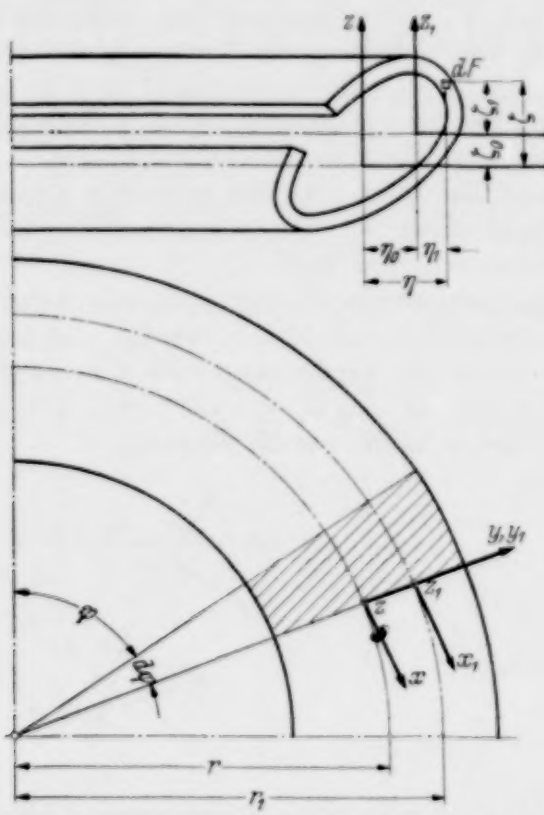


Abb. 1. Allgemeines Koordinatensystem für ein Kreisringstück.

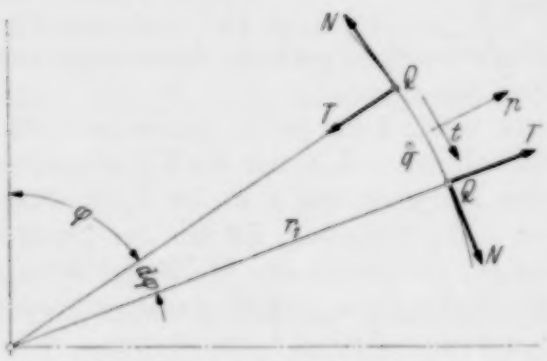


Abb. 2. Kräfte am Bogenelement $r_1\,d\varphi$.

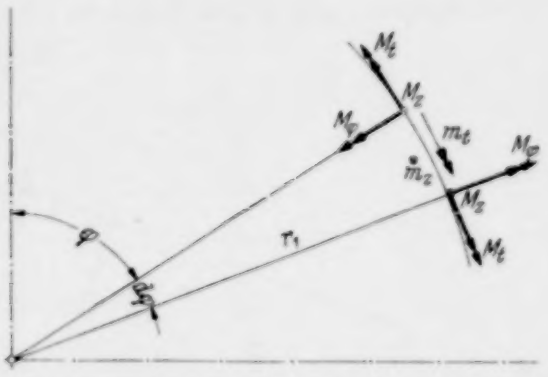


Abb. 3. Momentenzeiger am Bogenelement $r_1\,d\varphi$.

2. Gleichgewichtsbedingungen. Es werden zwei bewegliche Koordinatensysteme (Abb. 1) eingeführt, das eine mit $x = r\,d\varphi$ als Bogenlänge der Schwerpunktslinie, das andere mit $x_1 = r_1\,d\varphi$ als Bogenlänge einer Linie durch die Schubmittelpunkte der Querschnitte. Die Schnittgrößen M_φ, M_z (Biegemomente), M_t (Torsionsmoment), Q, T (Schubkräfte in axialer bzw. radialer Richtung) und N (Normalkraft), sowie die auf der Längeneinheit angreifenden, streckenweise stetig verteilten

[1] *F. K. G. Odqvist*, Ing.-Arch. 22 (1954), S. 98.
[2] z. B. *F. W. Bornscheuer*, Stahlbau, 21 (1952), S. 1., S. 225; 22 (1953), S. 32.
[3] *N. J. Hoff*, Journ. Royal Aeronaut. Soc., 47 (1943), S. 64 (Appendix).

äußeren Kräfte und Momente p, q, t, m_t, m_z sind auf das Bogenelement $r_1\,d\varphi$ zurückgeführt gedacht (Abb. 2 und 3).

Wenn die Anfangsgrößen für $\varphi = 0$ der betreffenden Schnittgrößen mit N_0, T_0, Q_0, M_{t_0}, M_{z0} und M_{φ_0} bezeichnet werden, ergeben die Gleichgewichtsbedingungen unter der üblichen Voraussetzung der vernachlässigbaren Verformungen:

$$N = N_0 \cos\varphi - T_0 \sin\varphi + \int_0^\varphi [p\, r_1 \sin(\varphi - \lambda) - t\, r_1 \cos(\varphi - \lambda)]\, d\lambda\,, \tag{1}$$

$$T = T_0 \cos\varphi + N_0 \sin\varphi - \int_0^\varphi [p\, r_1 \cos(\varphi - \lambda) + t\, r_1 \sin(\varphi - \lambda)]\, d\lambda\,, \tag{2}$$

$$Q = Q_0 - \int_0^\varphi q\, r_1\, d\lambda\,, \tag{3}$$

$$M_t = (M_{t_0} + Q_0\, r_1)\cos\varphi - M_{\varphi 0}\sin\varphi - Q_0\, r_1 + \int_0^\varphi q\, r_1^2\, d\lambda - \int_0^\varphi (m_t\, r_1 + q\, r_1^2)\cos(\varphi - \lambda)\, d\lambda\,, \tag{4}$$

$$M_\varphi = (M_{t0} + Q_0\, r_1)\sin\varphi + M_{\varphi 0}\cos\varphi - \int_0^\varphi (m_t\, r_1 + q\, r_1^2)\sin(\varphi - \lambda)\, d\lambda\,, \tag{5}$$

$$M_z = M_{z_0} + T_0\, r_1 \sin\varphi + N_0\, r_1 (1 - \cos\varphi) - \int_0^\varphi m_z\, r_1\, d\lambda$$
$$- \int_0^\varphi \{p\, r_1^2 \sin(\varphi - \lambda) + t\, r_1^2 [1 - \cos(\varphi - \lambda)]\}\, d\lambda\,. \tag{6}$$

In diesen Integralen sind p, q, t, m_t und m_z als Funktionen der Integrationsveränderlichen λ aufzufassen.

3. Verformungshypothese, Spannungsverteilung. Die Entwickelung der Lösung geschieht unter folgenden Annahmen:

1) Die Verdrehung jeder Querschnittsfläche erfolgt, ebenso wie beim geraden Balken, um den Schubmittelpunkt, d. h. um die Koordinatenachse x_1, die also die Hauptdrehachse bildet.

2) Die Ringdehnung ε in der x_1-Richtung setzt sich aus zwei Anteilen ε_1 und ε_2 zusammen. Dabei ist ε_1 die Dehnung, die mit der Annahme des Ebenbleibens der Querschnitte nach *Bernoulli*, ε_2 diejenige, die durch die Wölbbehinderung bei Torsion erhalten wird.

3) Die Dehnung ε_2 und die dadurch hervorgerufenen Spannungen werden im Prinzip der Theorie für den geraden Balken [2] entnommen. Wie aus dem folgenden ersichtlich, werden die in Frage kommenden Gleichungen [2] nur insoweit ergänzt, daß, wenn der Verdrehungswinkel beim geraden Balken mit Θ bezeichnet wird, sein Differential $d\Theta$ durch $d\vartheta - \psi\, d\varphi$ ersetzt wird. Die ε_2 entprechenden Spannungen geben somit schon ein geschlossenes Gleichgewichtssystem.

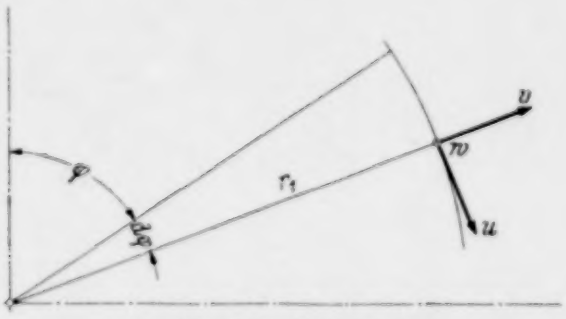


Abb. 4. Verschiebungsvektor.

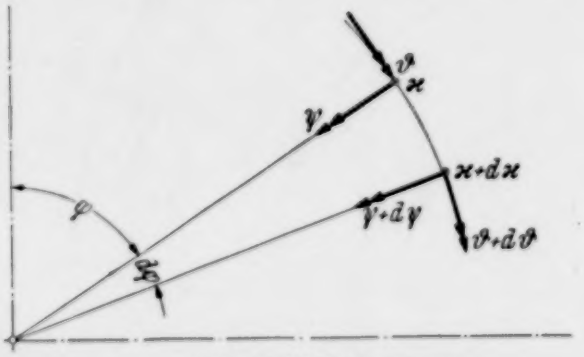


Abb. 5. Winkeländerungen.

Mit Rücksicht auf die Annahme 1) werden sämtliche Verschiebungsgrößen, ebenso wie die äußeren Belastungen, auf die Hauptdrehachse bezogen. Die positiven Richtungen gehen aus Abb. 4 und 5 hervor. Entsprechend der Theorie von *Odqvist* erhält man

$$\varepsilon_1 = \frac{1}{r_1 + \eta_1}\left[u' + v - \zeta_1(\vartheta + \psi') - \eta_1 \frac{v''}{r_1}\right], \tag{7}$$

wobei

$$r_1 = r + \eta_0\,, \qquad \eta_1 = \eta - \eta_0\,, \qquad \zeta_1 = \zeta - \zeta_0 \tag{8}$$

und

$$u' = \frac{du}{d\varphi}, \qquad v' = \frac{dv}{d\varphi}$$

ist.

Nach *Bornscheuer* [2] gilt für den verdrehten geraden Balken mit dem Verdrehungswinkel Θ

$$\varepsilon_2 = -\widetilde{w}\frac{d^2\Theta}{dx_1^2}, \tag{9}$$

wenn $\widetilde{w}$ die für den jeweiligen Punkt des Querschnitts geltende „Hauptverwölbung" ist.

Für ein Element $r_1\,d\varphi$ eines steifen, unbelasteten Ringes (Abb. 5) gilt jedoch, da die Vektoren ϑ, ψ, $\varkappa$ in diesem Fall an beiden Enden einander gleich sein müssen und die Winkel ϑ, ψ, $\varkappa$ und ihre Ableitungen klein sind,

$$d\vartheta - \psi\,d\varphi = 0, \tag{10a}$$

$$d\psi + \vartheta\,d\varphi = 0, \tag{10b}$$

$$d\varkappa = 0. \tag{10c}$$

Dies wird deutlich durch Projektion der Winkel auf die Richtungen der Tangente und der Normalen des Elementes sowie auf die Normale der Ebene des Ringes.

Das Element erhält somit gemäß (10a), ohne verformt zu werden, durch ψ einen Beitrag $d\vartheta$ zum Verdrehungswinkel. Die durch das Torsionsmoment erhaltene Vergrößerung des Verdrehungswinkel beträgt dann $d\vartheta - \psi\,d\varphi$. Wird also $d\Theta = d\vartheta - \psi\,d\varphi$ gesetzt, so gibt (9) mit $dx_1 = r_1\,d\varphi$

$$\varepsilon_2 = -\widetilde{w}\frac{\vartheta'' - \psi'}{r_1^2}, \tag{11}$$

wenn Ableitungen der Winkel nach φ mit Strichen bezeichnet werden.

Die Gleichungen (10b) und (10c) entsprechen den Gleichungen (28) bzw. (29), die für das belastete Element gelten.

Gemäß dem *Hooke*schen Gesetz bekommt man sodann für die den Dehnungen ε_1 und ε_2 entsprechenden Spannungsverteilungen

$$\sigma_1 = E\,\varepsilon_1, \qquad \sigma_2 = E\,\varepsilon_2 \tag{12a, b}$$

oder insgesamt

$$\sigma = E\,(\varepsilon_1 + \varepsilon_2). \tag{12c}$$

4. Die Grundgleichungen. Die Äquivalenz äußerer und innerer Kräfte im Querschnitt φ ergibt gemäß Annahme 3)

$$N = \int \sigma_1\,dF, \tag{13}$$

$$M_\varphi = \int \sigma_1\,\zeta_1\,dF, \tag{14}$$

$$M_z = \int \sigma_1\,\eta_1\,dF. \tag{15}$$

Werden die Bezeichnungen

$$\int dF = F, \tag{16}$$

$$\int \frac{\zeta\,\eta\,dF}{1 + \eta/r} = D, \tag{17}$$

$$\int \frac{\eta^2\,dF}{1 + \eta/r} = J, \tag{18}$$

$$\int \frac{\zeta^2\,dF}{1 + \eta/r} = I \tag{19}$$

eingeführt, so erhält man

$$\int \frac{dF}{r + \eta} = \frac{1}{r}\left(F + \frac{J}{r^2}\right), \tag{20}$$

$$\int \frac{\zeta\,dF}{r + \eta} = -\frac{D}{r^2}, \tag{21}$$

$$\int \frac{\eta\,dF}{r + \eta} = -\frac{J}{r^2}. \tag{22}$$

Wird außerdem

$$\left.\begin{aligned} \frac{1}{D}(I\,J - D^2) &= J_1 \\ \frac{1}{J}(I\,J - D^2) &= J_2 \\ \frac{1}{I}(I\,J - D^2) &= J_3 \end{aligned}\right\} \tag{23}$$

gesetzt, so wird durch Einsetzen von (7), (8) und (12a) in (13) bis (15) und mit (16) bis (22)

$$\frac{N r^3}{E} = (u' + v)(F r^2 + J) + (\vartheta + \psi')[D r + \zeta_0 (F r^2 + J)] + \frac{v''}{r_1}[J r + \eta_0 (F r^2 + J)], \tag{24}$$

$$\frac{M_\varphi r^3}{E} = -(u' + v)[D r + \zeta_0 (F r^2 + J)] - (\vartheta + \psi')[I r^2 + 2\zeta_0 D r + \zeta_0^2 (F r^2 + J)] - \frac{v''}{r_1}[D r r_1 + \zeta_0 J r + \zeta_0 \eta_0 (F r^2 + J)], \tag{25}$$

$$\frac{M_z r^3}{E} = -(u' + v)[J r + \eta_0 (F r^2 + J)] - (\vartheta + \psi')[D r r_1 + \zeta_0 J r + \zeta_0 \eta_0 (F r^2 + J)] - \frac{v''}{r_1}[J r^2 + 2\eta_0 J r + \eta_0^2 (F r^2 + J)]. \tag{26}$$

Werden diese Gleichungen nach den Verformungsgrößen aufgelöst, so ergibt sich mit (23)

$$u' + v = \frac{M_\varphi + N\zeta_0}{E}\left(\frac{\zeta_0}{J_2} - \frac{\eta_0}{J_1}\right) r + \frac{M_z + N\eta_0}{E}\left(\frac{\eta_0}{J_3} - \frac{\zeta_0}{J_1}\right) r + \frac{M_z + N r_1}{E F}\frac{r_1}{r}, \tag{27}$$

$$\vartheta + \psi' = -\frac{M_\varphi + N\zeta_0}{E J_2} r + \frac{M_z + N\eta_0}{E J_1} r, \tag{28}$$

$$v''\frac{r}{r_1} = \frac{M_\varphi + N\zeta_0}{E J_1} r^2 - \frac{M_z + N\eta_0}{E J_3} r^2 - \frac{M_z + N r_1}{E F}. \tag{29}$$

Für den geraden Balken gilt

$$M_t = G K \frac{d\Theta}{dx_1} - E C \frac{d^3\Theta}{dx_1^3}, \tag{30}$$

wobei C der Wölbwiderstand bezogen auf den Schubmittelpunkt und GK die Verdrehungssteifigkeit des Balkens bedeutet.

Mit $d\Theta = d\vartheta - \psi\, d\varphi$ und $dx_1 = r_1\, d\varphi$ erhält man

$$M_t = G K \frac{\vartheta' - \psi}{r_1} - E C \frac{\vartheta''' - \psi''}{r_1^3}. \tag{31}$$

In Gleichung (31) muß bei dieser Annäherung C und GK nach den für den geraden Balken geltenden Formeln berechnet werden.

Zusammen mit (27) bis (29) und (1) bis (6) erhält man damit die erforderlichen Gleichungen für die Berechnung von u, v, ϑ und ψ als Funktionen von φ. Die Spannungsverteilung σ ist somit durch die Gleichungen (7), (11) und (12a) bis (12c) bestimmt.

5. Integration der Grundgleichungen. Im folgenden wird der Querschnitt als überall gleich vorausgesetzt.

Folgende Bezeichnungen werden eingeführt:

$$\frac{1}{E F} = \alpha, \quad \frac{r}{E J_1} = \beta_1, \quad \frac{r}{E J_2} = \beta_2, \quad \frac{r}{E J_3} = \beta_3, \quad \frac{r_1}{G K} = \gamma_1, \quad \beta_1\eta_0 - \beta_2\zeta_0 = \delta, \quad \frac{G K}{E C} r_1^2 = \varepsilon. \tag{32}$$

Als Anfangsbedingungen für $\varphi = 0$ wird für die Verformungsgrößen angenommen

$$u(0) = u_0, \quad v(0) = v_0, \quad v'(0) = v_0', \quad w(0) = w_0, \quad w'(0) = \psi(0) = \psi_0, \quad \vartheta(0) = \vartheta_0, \quad \vartheta'(0) = \vartheta_0', \quad \vartheta''(0) = \vartheta_0''. \tag{33}$$

Aus (29), (32) und (33) erhält man nach Integration

$$v' = v_0' + \beta_1 r_1 \int_0^\varphi M_\varphi\, d\lambda - \left(\alpha\frac{r_1}{r} + \beta_3 r_1\right)\int_0^\varphi M_z\, d\lambda - r_1\left(\alpha\frac{r_1}{r} - \beta_1\zeta_0 + \beta_3\eta_0\right)\int_0^\varphi N\, d\lambda, \tag{34}$$

$$v = v_0 + v_0' \varphi + \beta_1 r_1 \int_0^{\varphi} \int_0^{\lambda_1} M_\varphi \, d\lambda \, d\lambda_1 - \left(\alpha \frac{r_1}{r} + \beta_3 r_1\right) \int_0^{\varphi} \int_0^{\lambda_2} M_z \, d\lambda \, d\lambda_1$$

$$- r_1 \left(\alpha \frac{r_1}{r} - \beta_1 \zeta_0 + \beta_3 \eta_0\right) \int_0^{\varphi} \int_0^{\lambda_2} N \, d\lambda \, d\lambda_1 . \tag{35}$$

Für die in (34) und (35) und im folgenden auftretenden Integrale gilt mit (1) bis (6)

$$\int_0^{\varphi} N \, d\lambda = N_0 \sin\varphi - T_0 (1 - \cos\varphi) + \int_0^{\varphi} p r_1 [1 - \cos(\varphi - \lambda)] \, d\lambda - \int_0^{\varphi} t r_1 \sin(\varphi - \lambda) \, d\lambda , \tag{36}$$

$$\int_0^{\varphi} \int_0^{\lambda_1} N \, d\lambda \, d\lambda_1 = N_0 (1 - \cos\varphi) - T_0 (\varphi - \sin\varphi) + \int_0^{\varphi} p r_1 [\varphi - \lambda - \sin(\varphi - \lambda)] \, d\lambda - \int_0^{\varphi} t r_1 [1 - \cos(\varphi - \lambda)] \, d\lambda , \tag{37}$$

$$\int_0^{\varphi} \int_0^{\lambda_2} \int_0^{\lambda_3} N \, d\lambda \, d\lambda_1 \, d\lambda_2 = N_0 (\varphi - \sin\varphi) - T_0 \left(\frac{1}{2}\varphi^2 - 1 + \cos\varphi\right) + \int_0^{\varphi} p r_1 \left[\frac{1}{2}(\varphi - \lambda)^2 - 1 + \cos(\varphi - \lambda)\right] d\lambda - \int_0^{\varphi} t r_1 [\varphi - \lambda - \sin(\varphi - \lambda)] \, d\lambda , \tag{38}$$

$$\int_0^{\varphi} M_\varphi \, d\lambda = (M_{t_0} + Q_0 r_1)(1 - \cos\varphi) + M_{\varphi 0} \sin\varphi - \int_0^{\varphi} (m_t r_1 + q r_1^2) [1 - \cos(\varphi - \lambda)] \, d\lambda , \tag{39}$$

$$\int_0^{\varphi} \int_0^{\lambda_1} M_\varphi \, d\lambda \, d\lambda_1 = (M_{t_0} + Q_0 r_1)(\varphi - \sin\varphi) + M_{\varphi 0} (1 - \cos\varphi) - \int_0^{\varphi} (m_t r_1 + q r_1^2) [\varphi - \lambda - \sin(\varphi - \lambda)] \, d\lambda , \tag{40}$$

$$\int_0^{\varphi} \int_0^{\lambda_1} \int_0^{\lambda_2} M_\varphi \, d\lambda \, d\lambda_1 \, d\lambda_2 = (M_{t0} + Q_0 r_1)\left(\frac{1}{2}\varphi^2 - 1 + \cos\varphi\right) + M_{\varphi 0} (\varphi - \sin\varphi) - \int_0^{\varphi} (m_t r_1 + q r_1^2) \left[\frac{1}{2}(\varphi - \lambda)^2 - 1 + \cos(\varphi - \lambda)\right] d\lambda , \tag{41}$$

$$\int_0^{\varphi} M_z \, d\lambda = M_{z0} \varphi + T_0 r_1 (1 - \cos\varphi) + N_0 r_1 (\varphi - \sin\varphi) - \int_0^{\varphi} m_z r_1 (\varphi - \lambda) \, d\lambda - \int_0^{\varphi} p r_1^2 [1 - \cos(\varphi - \lambda)] \, d\lambda - \int_0^{\varphi} t r_1^2 [\varphi - \lambda - \sin(\varphi - \lambda)] \, d\lambda , \tag{42}$$

$$\int_0^{\varphi} \int_0^{\lambda_1} M_z \, d\lambda \, d\lambda_1 = \frac{1}{2} M_{z0} \varphi^2 + T_0 r_1 (\varphi - \sin\varphi) + N_0 r_1 \left(\frac{1}{2}\varphi^2 - 1 + \cos\varphi\right) - \frac{1}{2} \int_0^{\varphi} m_z r_1 (\varphi - \lambda)^2 \, d\lambda - \int_0^{\varphi} p r_1^2 [\varphi - \lambda - \sin(\varphi - \lambda)] \, d\lambda - \int_0^{\varphi} t r_1^2 \left[\frac{1}{2}(\varphi - \lambda)^2 - 1 + \cos(\varphi - \lambda)\right] d\lambda , \tag{43}$$

$$\int_0^{\varphi}\int_0^{\lambda_1}\int_0^{\lambda_2} M_z\, d\lambda\, d\lambda_1\, d\lambda_2 = \frac{1}{6} M_{z0}\,\varphi^3 + T_0\, r_1\left(\frac{1}{2}\varphi^2 - 1 + \cos\varphi\right) + N_0\, r_1\left(\frac{1}{6}\varphi^3 - \varphi + \sin\varphi\right)$$
$$- \frac{1}{6}\int_0^{\varphi} m_z\, r_1\,(\varphi-\lambda)^3\, d\lambda - \int_0^{\varphi} p\, r_1^2\left[\frac{1}{2}(\varphi-\lambda)^2 - 1 + \cos(\varphi-\lambda)\right] d\lambda$$
$$- \int_0^{\varphi} t\, r_1^2\left[\frac{1}{6}(\varphi-\lambda)^3 - (\varphi-\lambda) + \sin(\varphi-\lambda)\right] d\lambda\,. \tag{44}$$

Einsetzen von (35) in (27) gibt

$$u = u_0 - \int_0^{\varphi} v\, d\lambda + \left(\alpha\frac{r_1^2}{r} + \beta_2\zeta_0^2 - 2\beta_1\zeta_0\eta_0 + \beta_3\eta_0^2\right)\int_0^{\varphi} N\, d\lambda$$
$$+ (\beta_2\zeta_0 - \beta_1\eta_0)\int_0^{\varphi} M_\varphi\, d\lambda + \left(\alpha\frac{r_1}{r} - \beta_1\zeta_0 + \beta_3\eta_0\right)\int_0^{\varphi} M_z\, d\lambda\,, \tag{45}$$

wobei das erste Integral aus

$$\int_0^{\varphi} v\, d\lambda = v_0\varphi + \frac{1}{2}v_0'\varphi^2 + \beta_1 r_1\int_0^{\varphi}\int_0^{\lambda_1}\int_0^{\lambda_2} M_\varphi\, d\lambda\, d\lambda_1\, d\lambda_2$$
$$- \left(\alpha\frac{r_1}{r} + \beta_3 r_1\right)\int_0^{\varphi}\int_0^{\lambda_1}\int_0^{\lambda_2} M_z\, d\lambda\, d\lambda_1\, d\lambda_2 - r_1\left(\alpha\frac{r_1}{r} - \beta_1\zeta_0 + \beta_3\eta_0\right)\int_0^{\varphi}\int_0^{\lambda_1}\int_0^{\lambda_2} N\, d\lambda\, d\lambda_1\, d\lambda_2 \tag{46}$$

erhalten wird.

Aus (28), (31) und (32) erhält man die Differentialgleichung

$$\vartheta^{IV} + (1-\varepsilon)\,\vartheta'' - \varepsilon\,\vartheta = \varepsilon\beta_2 M_\varphi - \varepsilon\beta_1 M_z - \varepsilon\delta N - \varepsilon\gamma_1 M_t' - \beta_2 M_\varphi'' + \beta_1 M_z'' + \delta N''\,, \tag{47}$$

welche die Lösung

$$\vartheta = C_1\,\mathfrak{Sin}\sqrt{\varepsilon}\varphi + C_2\,\mathfrak{Cof}\sqrt{\varepsilon}\varphi + C_3\sin\varphi + C_4\cos\varphi$$
$$+ \frac{1}{\varepsilon+1}\Bigg\{ -\varepsilon\beta_1\left[\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}\int_0^{\varphi} M_z\,\mathfrak{Sin}\sqrt{\varepsilon}\,(\varphi-\lambda)\,d\lambda - \int_0^{\varphi} M_z\sin(\varphi-\lambda)\,d\lambda\right]$$
$$+ \varepsilon\beta_2\left[\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}\int_0^{\varphi} M_\varphi\,\mathfrak{Sin}\sqrt{\varepsilon}\,(\varphi-\lambda)\,d\lambda - \int_0^{\varphi} M_\varphi\sin(\varphi-\lambda)\,d\lambda\right]$$
$$- \varepsilon\delta\left[\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}\int_0^{\varphi} N\,\mathfrak{Sin}\sqrt{\varepsilon}\,(\varphi-\lambda)\,d\lambda - \int_0^{\varphi} N\sin(\varphi-\lambda)\,d\lambda\right]$$
$$- \varepsilon\gamma_1\left[\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}\int_0^{\varphi} M_t'\,\mathfrak{Sin}\sqrt{\varepsilon}\,(\varphi-\lambda)\,d\lambda - \int_0^{\varphi} M_t'\sin(\varphi-\lambda)\,d\lambda\right]$$
$$+ \beta_1\left[\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}\int_0^{\varphi} M_z''\,\mathfrak{Sin}\sqrt{\varepsilon}\,(\varphi-\lambda)\,d\lambda - \int_0^{\varphi} M_z''\sin(\varphi-\lambda)\,d\lambda\right]$$
$$- \beta_2\left[\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}\int_0^{\varphi} M_\varphi''\,\mathfrak{Sin}\sqrt{\varepsilon}\,(\varphi-\lambda)\,d\lambda - \int_0^{\varphi} M_\varphi''\sin(\varphi-\lambda)\,d\lambda\right]$$
$$+ \delta\left[\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}\int_0^{\varphi} N''\,\mathfrak{Sin}\sqrt{\varepsilon}\,(\varphi-\lambda)\,d\lambda - \int_0^{\varphi} N''\sin(\varphi-\lambda)\,d\lambda\right]\Bigg\} \tag{48}$$

hat. Werden die Anfangsbedingungen $\vartheta(0) = \vartheta_0$, $\vartheta'(0) = \vartheta'_0$, $\vartheta''(0) = \vartheta''_0$, $\psi(0) = \psi_0$ erfüllt, so werden aus (28), (31) und (48) und mit Rücksicht auf

$$\int_0^\varphi F^{(j)} \operatorname{Sin}\sqrt{\varepsilon}\,(\varphi-\lambda)\,d\lambda = -F_0^{(j-1)} \operatorname{Sin}\sqrt{\varepsilon}\,\varphi + \sqrt{\varepsilon}\int_0^\varphi F^{(j-1)} \operatorname{Cof}\sqrt{\varepsilon}\,(\varphi-\lambda)\,d\lambda\,, \tag{49a}$$

$$\int_0^\varphi F^{(j)} \operatorname{Cof}\sqrt{\varepsilon}\,(\varphi-\lambda)\,d\lambda = F^{(j-1)} - F_0^{(j-1)} \operatorname{Cof}\sqrt{\varepsilon}\,\varphi + \sqrt{\varepsilon}\int_0^\varphi F^{(j-1)} \operatorname{Sin}\sqrt{\varepsilon}\,(\varphi-\lambda)\,d\lambda\,, \tag{49b}$$

$$\int_0^\varphi F^{(j)} \sin(\varphi-\lambda)\,d\lambda = -F_0^{(j-1)} \sin\varphi + \int_0^\varphi F^{(j-1)} \cos(\varphi-\lambda)\,d\lambda\,, \tag{49c}$$

$$\int_0^\varphi F^{(j)} \cos(\varphi-\lambda)\,d\lambda = F^{(j-1)} - F_0^{(j-1)} \cos\varphi - \int_0^\varphi F^{(j-1)} \sin(\varphi-\lambda)\,d\lambda\,, \tag{49d}$$

folgende Lösungen erhalten:

$$\begin{aligned}\vartheta = \frac{1}{\varepsilon+1}\Big\{&-\sqrt{\varepsilon}\,(\psi_0-\vartheta'_0) \operatorname{Sin}\sqrt{\varepsilon}\,\varphi + (\vartheta_0+\vartheta''_0-\beta_1 M_{z0}+\beta_2 M_{\varphi 0}-\delta N_0) \operatorname{Cof}\sqrt{\varepsilon}\,\varphi\\ &+(\varepsilon\psi_0+\vartheta'_0)\sin\varphi + (\varepsilon\vartheta_0-\vartheta''_0+\beta_1 M_{z0}-\beta_2 M_{\varphi 0}+\delta N_0)\cos\varphi\\ &+(\varepsilon+1)\Big[\beta_1\int_0^\varphi M_z \sin(\varphi-\lambda)\,d\lambda - \beta_2\int_0^\varphi M_\varphi \sin(\varphi-\lambda)\,d\lambda + \delta\int_0^\varphi N\sin(\varphi-\lambda)\,d\lambda\Big]\\ &-\varepsilon\gamma_1\Big[\int_0^\varphi M_t \operatorname{Cof}\sqrt{\varepsilon}\,(\varphi-\lambda)\,d\lambda - \int_0^\varphi M_t\cos(\varphi-\lambda)\,d\lambda\Big]\Big\}\,,\end{aligned} \tag{48a}$$

$$\begin{aligned}\vartheta' = \frac{1}{\varepsilon+1}\Big\{&-\varepsilon\,(\psi_0-\vartheta'_0) \operatorname{Cof}\sqrt{\varepsilon}\,\varphi + \sqrt{\varepsilon}\,(\vartheta_0+\vartheta''_0-\beta_1 M_{z0}+\beta_2 M_{\varphi 0}-\delta N_0) \operatorname{Sin}\sqrt{\varepsilon}\,\varphi\\ &+(\varepsilon\psi_0+\vartheta'_0)\cos\varphi - (\varepsilon\vartheta_0-\vartheta''_0+\beta_1 M_{z0}-\beta_2 M_{\varphi 0}+\delta N_0)\sin\varphi\\ &+(\varepsilon+1)\Big[\beta_1\int_0^\varphi M_z \cos(\varphi-\lambda)\,d\lambda - \beta_2\int_0^\varphi M_\varphi \cos(\varphi-\lambda)\,d\lambda + \delta\int_0^\varphi N\cos(\varphi-\lambda)\,d\lambda\Big]\\ &-\varepsilon\gamma_1\Big[\sqrt{\varepsilon}\int_0^\varphi M_t \operatorname{Sin}\sqrt{\varepsilon}\,(\varphi-\lambda)\,d\lambda + \int_0^\varphi M_t\sin(\varphi-\lambda)\,d\lambda\Big]\Big\}\,,\end{aligned} \tag{48b}$$

$$\begin{aligned}\vartheta'' = \frac{1}{\varepsilon+1}\Big\{&-\varepsilon^{3/2}\,(\psi_0-\vartheta'_0) \operatorname{Sin}\sqrt{\varepsilon}\,\varphi + \varepsilon\,(\vartheta_0+\vartheta''_0-\beta_1 M_{z0}+\beta_2 M_{\varphi 0}-\delta N_0) \operatorname{Cof}\sqrt{\varepsilon}\,\varphi\\ &-(\varepsilon\psi_0+\vartheta'_0)\sin\varphi - (\varepsilon\vartheta_0-\vartheta''_0+\beta_1 M_{z0}-\beta_2 M_{\varphi 0}+\delta N_0)\cos\varphi\\ &+(\varepsilon+1)\Big[\beta_1 M_z - \beta_2 M_\varphi + \delta N - \beta_1\int_0^\varphi M_z\sin(\varphi-\lambda)\,d\lambda\\ &\qquad+\beta_2\int_0^\varphi M_\varphi\sin(\varphi-\lambda)\,d\lambda - \delta\int_0^\varphi N\sin(\varphi-\lambda)\,d\lambda\Big]\\ &-\varepsilon\gamma_1\Big[\varepsilon\int_0^\varphi M_t \operatorname{Cof}\sqrt{\varepsilon}\,(\varphi-\lambda)\,d\lambda + \int_0^\varphi M_t\cos(\varphi-\lambda)\,d\lambda\Big]\Big\}\,,\end{aligned} \tag{48c}$$

$$\begin{aligned}\psi = \frac{1}{\varepsilon+1}\Big\{&(\psi_0-\vartheta'_0) \operatorname{Cof}\sqrt{\varepsilon}\,\varphi - \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}\,(\vartheta_0+\vartheta''_0-\beta_1 M_{z0}+\beta_2 M_{\varphi 0}-\delta N_0) \operatorname{Sin}\sqrt{\varepsilon}\,\varphi\\ &+(\varepsilon\psi_0+\vartheta'_0)\cos\varphi - (\varepsilon\vartheta_0-\vartheta''_0+\beta_1 M_{z0}-\beta_2 M_{\varphi 0}+\delta N_0)\sin\varphi\\ &+(\varepsilon+1)\Big[\beta_1\int_0^\varphi M_z\cos(\varphi-\lambda)\,d\lambda - \beta_2\int_0^\varphi M_\varphi\cos(\varphi-\lambda)\,d\lambda + \delta\int_0^\varphi N\cos(\varphi-\lambda)\,d\lambda\Big]\\ &+\varepsilon\gamma_1\Big[\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}\int_0^\varphi M_t \operatorname{Sin}\sqrt{\varepsilon}\,(\varphi-\lambda)\,d\lambda - \int_0^\varphi M_t\sin(\varphi-\lambda)\,d\lambda\Big]\Big\}\,,\end{aligned} \tag{50a}$$

$$\begin{aligned}\psi' = \frac{1}{\varepsilon+1}\Big\{&\sqrt{\varepsilon}\,(\psi_0-\vartheta'_0) \operatorname{Sin}\sqrt{\varepsilon}\,\varphi - (\vartheta_0+\vartheta''_0-\beta_1 M_{z0}+\beta_2 M_{\varphi 0}-\delta N_0) \operatorname{Cof}\sqrt{\varepsilon}\,\varphi\\ &-(\varepsilon\psi_0+\vartheta'_0)\sin\varphi - (\varepsilon\vartheta_0-\vartheta''_0+\beta_1 M_{z0}-\beta_2 M_{\varphi 0}+\delta N_0)\cos\varphi\\ &+(\varepsilon+1)\Big[\beta_1 M_z - \beta_2 M_\varphi + \delta N - \beta_1\int_0^\varphi M_z\sin(\varphi-\lambda)\,d\lambda\\ &\qquad+\beta_2\int_0^\varphi M_\varphi\sin(\varphi-\lambda)\,d\lambda - \delta\int_0^\varphi N\sin(\varphi-\lambda)\,d\lambda\Big]\\ &+\varepsilon\gamma_1\Big[\int_0^\varphi M_t \operatorname{Cof}\sqrt{\varepsilon}\,(\varphi-\lambda)\,d\lambda - \int_0^\varphi M_t\cos(\varphi-\lambda)\,d\lambda\Big]\Big\}\,.\end{aligned} \tag{50b}$$

Unter Ausnutzung von (1) bis (6) können die in (48a), (48b), (48c), (50a) und (50b) auftretenden Integrale nach Vereinfachung wie folgt geschrieben werden:

$$\int_0^\varphi N \sin(\varphi-\lambda)\,d\lambda = \frac{1}{2} N_0 \varphi \sin\varphi - \frac{1}{2} T_0 (\sin\varphi - \varphi\cos\varphi) + \frac{1}{2}\int_0^\varphi p\, r_1 [\sin(\varphi-\lambda) - (\varphi-\lambda)\cos(\varphi-\lambda)]\,d\lambda - \frac{1}{2}\int_0^\varphi t\, r_1 (\varphi-\lambda)\sin(\varphi-\lambda)\,d\lambda\,, \quad (51)$$

$$\int_0^\varphi N \cos(\varphi-\lambda)\,d\lambda = \frac{1}{2} N_0 (\sin\varphi + \varphi\cos\varphi) - \frac{1}{2} T_0 \varphi \sin\varphi + \frac{1}{2}\int_0^\varphi p\, r_1 (\varphi-\lambda)\sin(\varphi-\lambda)\,d\lambda - \frac{1}{2}\int_0^\varphi t\, r_1 [\sin(\varphi-\lambda) + (\varphi-\lambda)\cos(\varphi-\lambda)]\,d\lambda\,, \quad (52)$$

$$\int_0^\varphi M_\varphi \sin(\varphi-\lambda)\,d\lambda = \frac{1}{2}(M_{t0} + Q_0 r_1)(\sin\varphi - \varphi\cos\varphi) + \frac{1}{2} M_{\varphi 0}\varphi\sin\varphi - \frac{1}{2}\int_0^\varphi (m_t r_1 + q r_1^2)[\sin(\varphi-\lambda) - (\varphi-\lambda)\cos(\varphi-\lambda)]\,d\lambda\,, \quad (53)$$

$$\int_0^\varphi M_\varphi \cos(\varphi-\lambda)\,d\lambda = \frac{1}{2}(M_{t0} + Q_0 r_1)\varphi\sin\varphi + \frac{1}{2} M_{\varphi 0}(\sin\varphi + \varphi\cos\varphi) - \frac{1}{2}\int_0^\varphi (m_t r_1 + q r_1^2)(\varphi-\lambda)\sin(\varphi-\lambda)\,d\lambda\,, \quad (54)$$

$$\left.\begin{aligned}\int_0^\varphi M_z \sin(\varphi-\lambda)\,d\lambda = {} & M_{z0}(1-\cos\varphi) + \frac{1}{2} T_0 r_1 (\sin\varphi - \varphi\cos\varphi) \\ & + N_0 r_1 \left[1 - \cos\varphi - \frac{1}{2}\varphi\sin\varphi\right] - \int_0^\varphi m_z r_1 [1-\cos(\varphi-\lambda)]\,d\lambda \\ & - \frac{1}{2}\int_0^\varphi p\, r_1^2 [\sin(\varphi-\lambda) - (\varphi-\lambda)\cos(\varphi-\lambda)]\,d\lambda \\ & - \int_0^\varphi t\, r_1^2 [1-\cos(\varphi-\lambda) - \frac{1}{2}(\varphi-\lambda)\sin(\varphi-\lambda)]\,d\lambda\,,\end{aligned}\right\} \quad (55)$$

$$\left.\begin{aligned}\int_0^\varphi M_z \cos(\varphi-\lambda)\,d\lambda = {} & M_{z0}\sin\varphi + \frac{1}{2} T_0 r_1 \varphi\sin\varphi + \frac{1}{2} N_0 r_1 (\sin\varphi - \varphi\cos\varphi) \\ & - \int_0^\varphi m_z r_1 \sin(\varphi-\lambda)\,d\lambda - \frac{1}{2}\int_0^\varphi p\, r_1^2 (\varphi-\lambda)\sin(\varphi-\lambda)\,d\lambda \\ & - \frac{1}{2}\int_0^\varphi t\, r_1^2 [\sin(\varphi-\lambda) - (\varphi-\lambda)\cos(\varphi-\lambda)]\,d\lambda\,,\end{aligned}\right\} \quad (56)$$

$$\left.\begin{aligned}\int_0^\varphi M_t \sin(\varphi-\lambda)\,d\lambda = {} & \frac{1}{2}(M_{t0} + Q_0 r_1)\varphi\sin\varphi - \frac{1}{2} M_{\varphi 0}(\sin\varphi - \varphi\cos\varphi) \\ & - Q_0 r_1 (1-\cos\varphi) + \int_0^\varphi q\, r_1^2 [1-\cos(\varphi-\lambda)]\,d\lambda \\ & - \frac{1}{2}\int_0^\varphi (m_t r_1 + q r_1^2)(\varphi-\lambda)\sin(\varphi-\lambda)\,d\lambda\,,\end{aligned}\right\} \quad (57)$$

$$\int_0^\varphi M_t \cos(\varphi-\lambda)\,d\lambda = \frac{1}{2}(M_{t0}+Q_0 r_1)(\sin\varphi+\varphi\cos\varphi)-\frac{1}{2}M_{\varphi 0}\varphi\sin\varphi$$

$$-Q_0 r_1\sin\varphi+\int_0^\varphi q r_1^2\sin(\varphi-\lambda)\,d\lambda-\frac{1}{2}\int_0^\varphi (m_t r_1+q r_1^2)[\sin(\varphi-\lambda)+(\varphi-\lambda)\cos(\varphi-\lambda)]\,d\lambda\,, \tag{58}$$

$$\left.\begin{aligned}\int_0^\varphi M_t \operatorname{Sin}\sqrt{\varepsilon}(\varphi-\lambda)\,d\lambda = {}& \frac{\sqrt{\varepsilon}}{\varepsilon+1}(M_{t0}+Q_0 r_1)(\operatorname{Cof}\sqrt{\varepsilon}\varphi-\cos\varphi)\\ & -\frac{1}{\varepsilon+1}M_{\varphi 0}(\operatorname{Sin}\sqrt{\varepsilon}\varphi-\sqrt{\varepsilon}\sin\varphi)-\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}Q_0 r_1(\operatorname{Cof}\sqrt{\varepsilon}\varphi-1)\\ & +\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}\int_0^\varphi q r_1^2[\operatorname{Cof}\sqrt{\varepsilon}(\varphi-\lambda)-1]\,d\lambda\\ & -\frac{\sqrt{\varepsilon}}{\varepsilon+1}\int_0^\varphi (m_t r_1+q r_1^2)[\operatorname{Cof}\sqrt{\varepsilon}(\varphi-\lambda)-\cos(\varphi-\lambda)]\,d\lambda\,,\end{aligned}\right\} \tag{59}$$

$$\left.\begin{aligned}\int_0^\varphi M_t \operatorname{Cof}\sqrt{\varepsilon}(\varphi-\lambda)\,d\lambda = {}& \frac{1}{\varepsilon+1}(M_{t0}+Q_0 r_1)(\sqrt{\varepsilon}\operatorname{Sin}\sqrt{\varepsilon}\varphi+\sin\varphi)\\ & -\frac{1}{\varepsilon+1}M_{\varphi 0}(\operatorname{Cof}\sqrt{\varepsilon}\varphi-\cos\varphi)-\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}Q_0 r_1\operatorname{Sin}\sqrt{\varepsilon}\varphi\\ & +\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}\int_0^\varphi q r_1^2\operatorname{Sin}\sqrt{\varepsilon}(\varphi-\lambda)\,d\lambda\\ & -\frac{1}{\varepsilon+1}\int_0^\varphi (m_t r_1+q r_1^2)[\sqrt{\varepsilon}\operatorname{Sin}\sqrt{\varepsilon}(\varphi-\lambda)+\sin(\varphi-\lambda)]\,d\lambda\,.\end{aligned}\right\} \tag{60}$$

Schließlich ist

$$w = w_0 + r_1\int_0^\varphi \psi\,d\lambda\,, \tag{61}$$

woraus mit (50a)

$$\left.\begin{aligned}w = w_0+\frac{r_1}{\varepsilon+1}\Big\{ & \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}(\psi_0-\vartheta_0')\operatorname{Sin}\sqrt{\varepsilon}\varphi-\frac{1}{\varepsilon}(\vartheta_0+\vartheta_0''-\beta_1 M_{z0}+\beta_2 M_{\varphi 0}-\delta N_0)(\operatorname{Cof}\sqrt{\varepsilon}\varphi-1)\\ & +(\varepsilon\psi_0+\vartheta_0')\sin\varphi-(\varepsilon\vartheta_0-\vartheta_0''+\beta_1 M_{z0}-\beta_2 M_{\varphi 0}+\delta N_0)(1-\cos\varphi)\\ & +(\varepsilon+1)\Big[\beta_1\int_0^\varphi M_z\sin(\varphi-\lambda)\,d\lambda-\beta_2\int_0^\varphi M_\varphi\sin(\varphi-\lambda)\,d\lambda\\ & \qquad +\delta\int_0^\varphi N\sin(\varphi-\lambda)\,d\lambda\Big]\\ & -\varepsilon\gamma_1\Big[\frac{1}{\varepsilon}\int_0^\varphi M_t[1-\operatorname{Cof}\sqrt{\varepsilon}(\varphi-\lambda)]\,d\lambda+\int_0^\varphi M_t[1-\cos(\varphi-\lambda)]\,d\lambda\Big]\Big\}\end{aligned}\right\} \tag{62}$$

folgt.

Die in (62) auftretenden Integrale können mit Hilfe von (51), (53), (55), (58), (60) und der Formel

$$\int_0^\varphi M_t\,d\lambda = (M_{t0}+Q_0 r_1)\sin\varphi-M_{\varphi 0}(1-\cos\varphi)-Q_0 r_1\varphi$$
$$+\int_0^\varphi q r_1^2(\varphi-\lambda)\,d\lambda-\int_0^\varphi (m_t r_1+q r_1^2)\sin(\varphi-\lambda)\,d\lambda \tag{63}$$

berechnet werden.

Aus (34) bis (63) können sämtliche Verformungen als Funktionen von φ und von den 14 Anfangswerten — N_0, T_0, Q_0, M_{t0}, $M_{\varphi 0}$, M_{z0} und (33) — gefunden werden.

Die Lösung schließt das Auftreten von konzentrierten Lasten und Momenten innerhalb des betrachteten Gebietes aus. Falls solche vorkommen, muß der Ring in Intervalle zwischen den Unstetigkeitspunkten der äußeren Belastung aufgeteilt werden.

Bei statisch unbestimmten Problemen, bei welchen die Anfangswerte voneinander abhängig sind, müssen ebensoviele Randbedingungen wie statisch Unbestimmte berücksichtigt werden. Von diesen dürften nur diejenigen, die zur Bestimmung von ϑ_0' und ϑ_0'' erforderlich sind, einer Erklärung benötigen.

Die Querschnittsverwölbung ist beim geraden Balken für jeden Punkt der Querschnittsfläche proportional zur Größe Θ' des betrachteten Schnittes. Dieser Verwölbung entsprechen die Spannungen σ_2 nach (12b). Bei jeder Übergangsstelle zwischen zwei Intervallen muß also mit $d\Theta = d\vartheta - \psi\, d\varphi$

$$(\vartheta' - \psi)_1 = (\vartheta' - \psi)_2 , \tag{64}$$

$$\left[\sigma_1 - \frac{E\,\widetilde{w}}{r_1^2}(\vartheta'' - \psi')\right]_1 = \left[\sigma_1 - \frac{E\,\widetilde{w}}{r_1^2}(\vartheta'' - \psi')\right]_2 \tag{65}$$

sein, falls es sich um einen kontinuierlichen Ring handelt und die Indizes 1 bzw. 2 die zusammenfallenden Endpunkte der Intervalle bezeichnen. Infolge der Kontinuitätsbedingung $\psi_1 = \psi_2$ vereinfacht sich (64) zu

$$\vartheta_1' = \vartheta_2' . \tag{64a}$$

Fehlen außerdem konzentrierte angreifende Biegemomente und Normalkräfte, so wird $(\sigma_1)_1 = (\sigma_1)_2$ und $\psi_1' = \psi_2'$, wodurch (65) sich vereinfacht zu

$$\vartheta_1'' = \vartheta_2'' . \tag{65a}$$

Für ein freies, unbelastetes Balkenende gilt

$$\vartheta'' - \psi' = 0 . \tag{66}$$

Im folgenden werden zwei der Fälle, die von *Odqvist* behandelt sind, durchgerechnet.

6. Der geschlossene Ring mit konzentrierten umstülpenden Momenten. Der Ring sei von n gleich großen konzentrierten Momenten M mit gleichem Zentriwinkelabstand $2\varphi_1 = 2\pi/n$ (Abb. 6) belastet. Aus Gleichgewichtsgründen ist

$$M_{\varphi 0} = -\frac{M}{2\sin\varphi_1} \tag{67}$$

sowie $N_0 = T_0 = Q_0 = M_{t0} = 0$.

Zur Bestimmung der übrigen 9 Anfangswerte stehen folgende Randbedingungen zur Verfügung:

1) $v_0' = 0$, 2) $v'(\varphi_1) = 0$, 3) $u_0 = 0$,
4) $u(\varphi_1) = 0$, 5) $w(\varphi_1) = 0$, 6) $\psi_0 = 0$,
7) $\psi(\varphi_1) = 0$, 8) $\vartheta'(\varphi_1) = \vartheta'(-\varphi_1)$, 9a) $\vartheta(\varphi_1) = \vartheta(-\varphi_1)$, 9b) $\vartheta''(\varphi_1) = \vartheta''(-\varphi_1)$.

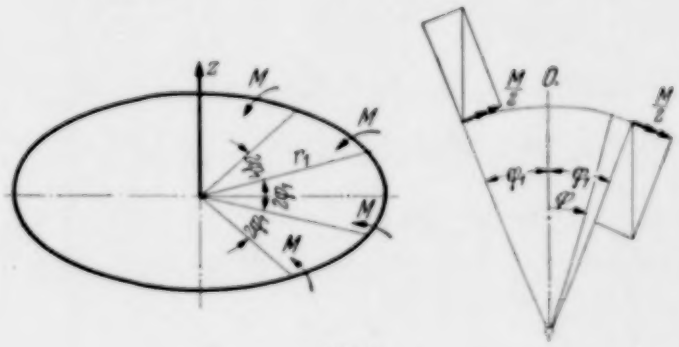


Abb. 6.

Die Bedingungen 1) und 2) in (34) eingesetzt ergeben

$$M_{z0} = \frac{\beta_1 r}{\alpha + \beta_3 r}\,\frac{\sin\varphi_1}{\varphi_1}\,M_{\varphi 0} . \tag{68}$$

Die Momente M_t, M_φ und M_z können dann aus (4) bis (6) berechnet werden.

Die Bedingungen 1), 3) und 4) in (45) eingesetzt ergeben v_0. Die Bedingungen 6), 9a) und 9b) in (48a) und (48c) eingesetzt ergeben $\vartheta_0' = 0$, was auch direkt ersichtlich ist, wenn man beachtet, daß $\varphi = 0$ ein Symmetrieschnitt ist. Der Wert $\vartheta_0' = 0$ sowie die Bedingungen 6), 7) und 8) in (48b) und (50a) eingesetzt ergeben das folgende System zur Lösung von ϑ_0 und ϑ_0'':

$$\left.\begin{aligned}
&\sqrt{\varepsilon}\,(\vartheta_0 + \vartheta_0'' - \beta_1 M_{z0} + \beta_2 M_{\varphi 0})\,\mathfrak{Sin}\sqrt{\varepsilon}\varphi_1 - (\varepsilon\,\vartheta_0 - \vartheta_0'' + \beta_1 M_{z0} - \beta_2 M_{\varphi 0})\sin\varphi_1 \\
&\quad + (\varepsilon+1)\left[\beta_1 M_{z0}\sin\varphi_1 - \frac{1}{2}\beta_2 M_{\varphi 0}(\sin\varphi_1 + \varphi_1\cos\varphi_1)\right] \\
&\quad + \varepsilon\gamma_1\left[\frac{\sqrt{\varepsilon}}{\varepsilon+1}M_{\varphi 0}(\mathfrak{Sin}\sqrt{\varepsilon}\varphi_1 - \sqrt{\varepsilon}\sin\varphi_1) + \frac{1}{2}M_{\varphi 0}(\sin\varphi_1 - \varphi_1\cos\varphi_1)\right] = 0 , \\
&-\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}(\vartheta_0 + \vartheta_0'' - \beta_1 M_{z0} + \beta_2 M_{\varphi 0})\,\mathfrak{Sin}\sqrt{\varepsilon}\varphi_1 - (\varepsilon\,\vartheta_0 - \vartheta_0'' + \beta_1 M_{z0} - \beta_2 M_{\varphi 0})\sin\varphi_1 \\
&\quad + (\varepsilon+1)\left[\beta_1 M_{z0}\sin\varphi_1 - \frac{1}{2}\beta_2 M_{\varphi 0}(\sin\varphi_1 + \varphi_1\cos\varphi_1)\right] \\
&\quad + \varepsilon\gamma_1\left[-\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}(\varepsilon+1)}M_{\varphi 0}(\mathfrak{Sin}\sqrt{\varepsilon}\varphi_1 - \sqrt{\varepsilon}\sin\varphi_1) + \frac{1}{2}M_{\varphi 0}(\sin\varphi_1 - \varphi_1\cos\varphi_1)\right] = 0 .
\end{aligned}\right\} \tag{69}$$

Die Bedingung 5) in (62) eingesetzt ergibt dann w_0. Damit ist der Verformungszustand vollständig bestimmt, und man erhält σ aus (12c).

7. Der geschlossene Ring mit gleichmäßig verteilter Last quer zur Ringebene und mit äquidistanten Stützen. Die Belastung wird als konstant angenommen (Abb. 7). Über den Stützpunkten tritt ein statisch unbestimmtes Biegemoment M_1 auf, dagegen verschwindet dort aus Symmetriegründen das Torsionsmoment. Eine Gleichgewichtsbetrachtung ergibt

$$N_0 = T_0 = Q_0 = M_{z0} = 0\,,$$

sowie

$$\left.\begin{aligned} M_{t0} &= q r_1^2(\sin\varphi_1 - \varphi_1\cos\varphi_1) - M_1\sin\varphi_1\,,\\ M_{\varphi 0} &= q r_1^2(\varphi_1\sin\varphi_1 - 1 + \cos\varphi_1) - M_1\cos\varphi_1\,, \end{aligned}\right\} \quad (70)$$

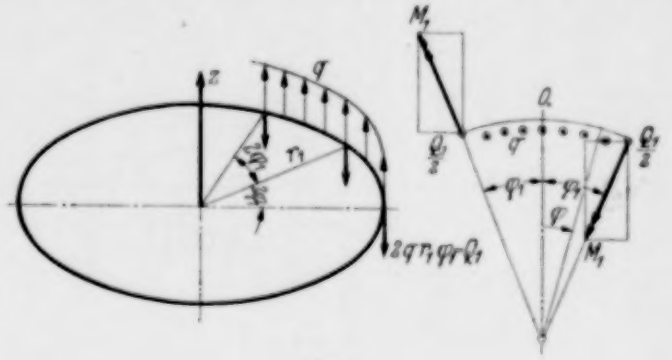


Abb. 7.

Zur Bestimmung von M_1 sowie der übrigen 8 unbekannten Anfangswerte gelten die gleichen Randbedingungen wie im vorigen Beispiel.

Die Bedingungen 1) und 2) in (34) eingesetzt ergeben

$$M_1 = q\,r_1^2\,(1 - \varphi_1\,\mathrm{ctg}\,\varphi_1)\,, \quad (71)$$

wodurch mit (70)

$$M_{t0} = 0\,, \qquad M_{\varphi 0} = q\,r_1^2\left(\frac{\varphi_1}{\sin\varphi_1} - 1\right) \quad (70a)$$

erhalten wird.

Aus (4) bis (6) folgt

$$\left.\begin{aligned} M_t &= -\,q\,r_1^2\left(\frac{\varphi_1\sin\varphi}{\sin\varphi_1} - \varphi\right),\\ M_\varphi &= q\,r_1^2\left(\frac{\varphi_1\cos\varphi}{\sin\varphi_1} - 1\right),\\ M_z &= 0\,. \end{aligned}\right\} \quad (72)$$

Die übrigen Randbedingungen werden wie im vorigen Beispiel behandelt. Aus (48a) bis (48c), (50a) und (50b) erhält man

$$\left.\begin{aligned} \vartheta = \frac{1}{\varepsilon+1}\Big\{&(\vartheta_0 + \vartheta_0'' + \beta_2 M_{\varphi 0})\,\mathfrak{Coj}\sqrt{\varepsilon}\,\varphi + (\varepsilon\,\vartheta_0 - \vartheta_0'' - \beta_2 M_{\varphi 0})\cos\varphi\\ &-(\varepsilon+1)\,\beta_2\left[\frac{1}{2}M_{\varphi 0}\varphi\sin\varphi + q\,r_1^2\left(\frac{1}{2}\varphi\sin\varphi + \cos\varphi - 1\right)\right]\\ &-\varepsilon\,\gamma_1\left[-\frac{1}{\varepsilon+1}(M_{\varphi 0} + q\,r_1^2)\,(\mathfrak{Coj}\sqrt{\varepsilon}\,\varphi - \cos\varphi) + \frac{1}{\varepsilon}\,q\,r_1^2\,(\mathfrak{Coj}\sqrt{\varepsilon}\,\varphi - 1)\right.\\ &\left.\left.+\frac{1}{2}(M_{\varphi 0} + q\,r_1^2)\,\varphi\sin\varphi - q\,r_1^2\,(1-\cos\varphi)\right]\right\}, \end{aligned}\right\} \quad (73a)$$

$$\left.\begin{aligned} \vartheta' = \frac{1}{\varepsilon+1}\Big\{&\sqrt{\varepsilon}\,(\vartheta_0 + \vartheta_0'' + \beta_2 M_{\varphi 0})\,\mathfrak{Sin}\sqrt{\varepsilon}\,\varphi - (\varepsilon\,\vartheta_0 - \vartheta_0'' - \beta_2 M_{\varphi 0})\sin\varphi\\ &-\frac{\varepsilon+1}{2}\beta_2\,[M_{\varphi 0}\,(\sin\varphi + \varphi\cos\varphi) - q\,r_1^2\,(\sin\varphi - \varphi\cos\varphi)]\\ &-\varepsilon\,\gamma_1\left[-\frac{\sqrt{\varepsilon}}{\varepsilon+1}(M_{\varphi 0} + q\,r_1^2)\,(\mathfrak{Sin}\sqrt{\varepsilon}\,\varphi - \sqrt{\varepsilon}\sin\varphi) + \frac{q\,r_1^2}{\sqrt{\varepsilon}}(\mathfrak{Sin}\sqrt{\varepsilon}\,\varphi - \sqrt{\varepsilon}\sin\varphi)\right.\\ &\left.\left.-\frac{1}{2}(M_{\varphi 0} + q\,r_1^2)\,(\sin\varphi - \varphi\cos\varphi)\right]\right\}, \end{aligned}\right\} \quad (73b)$$

$$\left.\begin{aligned} \vartheta'' = \frac{1}{\varepsilon+1}\Big\{&\varepsilon\,(\vartheta_0 + \vartheta_0'' + \beta_2 M_{\varphi 0})\,\mathfrak{Coj}\sqrt{\varepsilon}\,\varphi - (\varepsilon\,\vartheta_0 - \vartheta_0'' - \beta_2 M_{\varphi 0})\cos\varphi\\ &+(\varepsilon+1)\,\beta_2\left[M_{\varphi 0}\left(\frac{1}{2}\varphi\sin\varphi - \cos\varphi\right) + \frac{1}{2}\,q\,r_1^2\,\varphi\sin\varphi\right]\\ &-\varepsilon\,\gamma_1\left[-\frac{\varepsilon}{\varepsilon+1}(M_{\varphi 0} + q\,r_1^2)\,(\mathfrak{Coj}\sqrt{\varepsilon}\,\varphi - \cos\varphi) + q\,r_1^2\,(\mathfrak{Coj}\sqrt{\varepsilon}\,\varphi - \cos\varphi)\right.\\ &\left.\left.-\frac{1}{2}(M_{\varphi 0} + q\,r_1^2)\,\varphi\sin\varphi\right]\right\}, \end{aligned}\right\} \quad (73c)$$

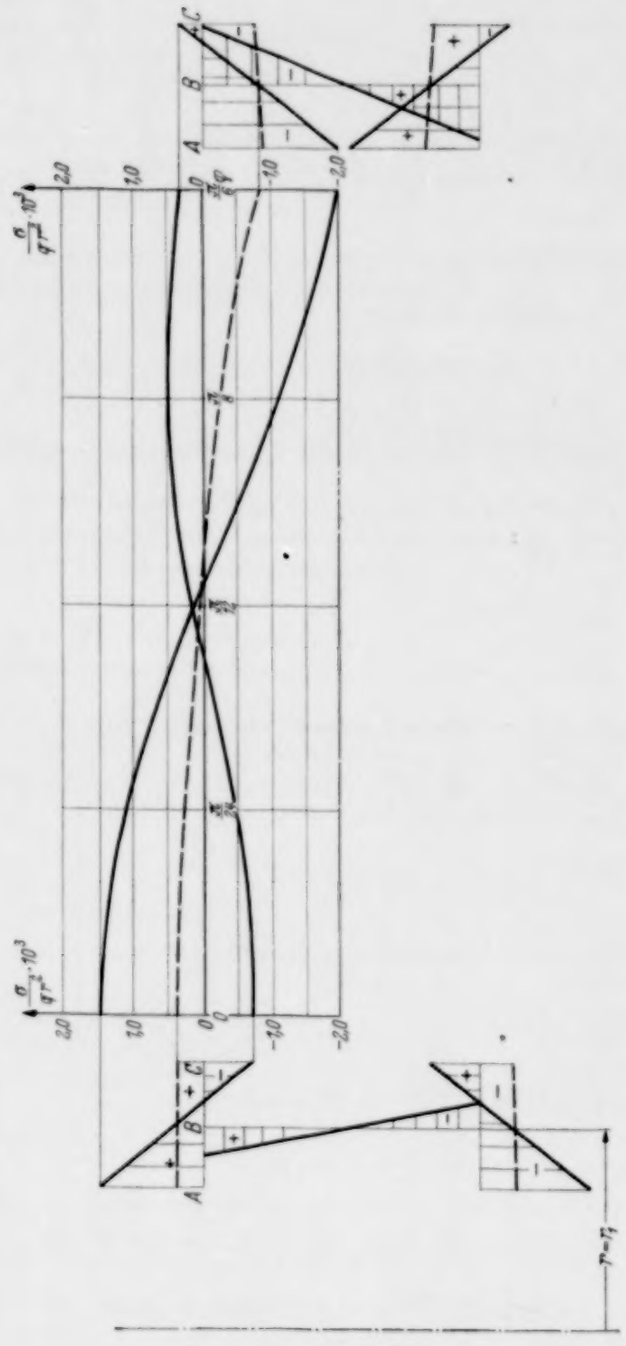
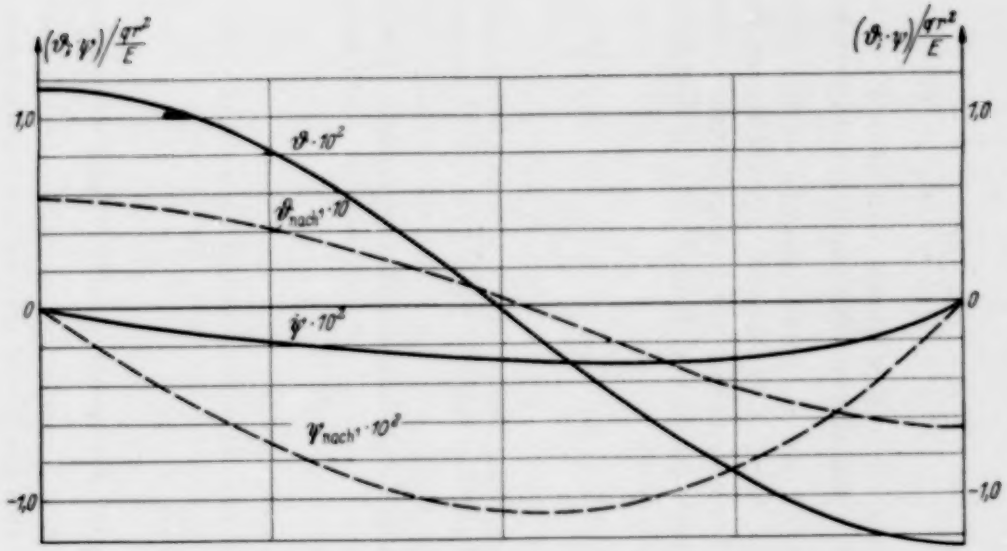


Abb. 8. Spannungen.

(I 16, $r = r_1 = 100$ cm)

φ	0			$\pi/24$			$\pi/12$			$\pi/8$			$\pi/6$		
Punkt	A	B	C	A	B	C	A	B	C	A	B	C	A	B	C
$\frac{\sigma_1}{q r^2} \times 10^3$	0.419	0.404	0.389	0.340	0.327	0.315	0.102	0.099	0.095	—0.289	—0.278	—0.268	—0.827	—0.797	—0.768
$\frac{\sigma_2}{q r^2} \times 10^3$	1.078	0	—1.078	0.804	0	—0.804	0.078	0	—0.078	—0.772	0	0.772	—1.162	0	1.162
$\frac{\sigma}{q r^2} \times 10^3$	1.497	0.404	—0.689	1.144	0.327	—0.489	0.180	0.099	0.017	—1.061	—0.278	0.504	—1.989	—0.797	0.394



φ	0		$\pi/24$		$\pi/12$		$\pi/8$		$\pi/6$	
		nach [1]		nach [1]		nach [1]		nach [1]		nach [1]
$\vartheta/\frac{q\,r^2}{E}$	0.0116	0.0568	0.0084	0.0420	—0.0002	0.0032	—0.0087	—0.0418	—0.0125	—0.0649
$\vartheta'/\frac{q\,r^2}{E}$	0	0	—0.0483	—0.2190	—0.0711	—0.3488	—0.0537	—0.3027	0	0
$\vartheta''/\frac{q\,r^2}{E}$	—0.4030	—1.7879	—0.3007	—1.4445	—0.0290	—0.4257	0.2890	1.2341	0.4390	3.4790
$\psi/\frac{q\,r^2}{E}$	0	0	—0.0017	—0.0073	—0.0028	—0.0109	—0.0028	—0.0087	0	0
$\psi'/\frac{q\,r^2}{E}$	—0.0166	—0.0619	—0.0125	—0.0461	—0.0010	—0.0044	0.0122	0.0452	0.0225	0.0748

Abb. 9. Verformungen.

$$\left.\begin{aligned}\psi = \frac{1}{\varepsilon+1}\Big\{&-\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}\,(\vartheta_0+\vartheta_0''+\beta_2 M_{\varphi 0})\,\mathfrak{Sin}\sqrt{\varepsilon}\,\varphi-(\varepsilon\,\vartheta_0-\vartheta_0''-\beta_2 M_{\varphi 0})\sin\varphi\\&-\frac{\varepsilon+1}{2}\beta_2\,[M_{\varphi 0}(\sin\varphi+\varphi\cos\varphi)-q\,r_1^2(\sin\varphi-\varphi\cos\varphi)]\\&+\varepsilon\,\gamma_1\Big[-\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}\,(\varepsilon+1)}\,(M_{\varphi 0}+q\,r_1^2)\,(\mathfrak{Sin}\sqrt{\varepsilon}\,\varphi-\sqrt{\varepsilon}\sin\varphi)+\frac{q\,r_1^2}{\varepsilon\sqrt{\varepsilon}}\,(\mathfrak{Sin}\sqrt{\varepsilon}\,\varphi-\sqrt{\varepsilon}\,\varphi)\\&\qquad+\frac{1}{2}\,(M_{\varphi 0}+q\,r_1^2)\,(\sin\varphi-\varphi\cos\varphi)-q\,r_1^2\,(\varphi-\sin\varphi)\Big]\Big\},\end{aligned}\right\}\tag{74a}$$

$$\left.\begin{aligned}\psi' = \frac{1}{\varepsilon+1}\Big\{&-(\vartheta_0+\vartheta_0''+\beta_2 M_{\varphi 0})\,\mathfrak{Cof}\sqrt{\varepsilon}\,\varphi-(\varepsilon\,\vartheta_0-\vartheta_0''-\beta_2 M_{\varphi 0})\cos\varphi\\&+(\varepsilon+1)\,\beta_2\Big[M_{\varphi 0}\Big(\frac{1}{2}\,\varphi\sin\varphi-\cos\varphi\Big)+\frac{1}{2}\,q\,r_1^2\,\varphi\sin\varphi\Big]\\&+\varepsilon\,\gamma_1\Big[-\frac{1}{\varepsilon+1}\,(M_{\varphi 0}+q\,r_1^2)\,(\mathfrak{Cof}\sqrt{\varepsilon}\,\varphi-\cos\varphi)+\frac{1}{\varepsilon}\,q\,r_1^2\,(\mathfrak{Cof}\sqrt{\varepsilon}\,\varphi-1)\\&\qquad+\frac{1}{2}\,(M_{\varphi 0}+q\,r_1^2)\,\varphi\sin\varphi-q\,r_1^2\,(1-\cos\varphi)\Big]\Big\}.\end{aligned}\right\}\tag{74b}$$

Um die Abweichungen der Ergebnisse der oben entwickelten Methode von denjenigen nach *Odqvist* zu verdeutlichen, wird der obige Fall mit folgenden Annahmen zahlenmäßig durchgerechnet:

Der Ring sei auf 6 Stützen gelagert, d. h. $2\,\varphi_1 = \pi/3$. Das Querschnittsprofil sei doppelsymmetrisch und entspreche einem I 16, $r = r_1 = 100$ cm. Nach *Bornscheuer* [1] gilt für dieses Profil $K = 7{,}11$ cm^4, $C = 3100$ cm^6, $\widetilde{w}_{max} = 27{,}9$ cm^2. Zur Vereinfachung wird angenommen, daß η gegen r bei Berechnung von I und J vernachlässigt werden kann, d. h. daß die Werte für den geraden Balken Geltung haben. Gemäß (17) bis (19) und (23) gilt dann

$$D = 0\,, \quad J_1 = \infty\,, \quad J_2 = I = 935\text{ cm}^4$$

und gemäß (32)

$$\beta_1 = 0\,, \quad \beta_2 = 0{,}10\,695\,\frac{1}{E}\,(\text{kgcm})^{-1}\,, \quad \gamma_1 = 36{,}568\,\frac{1}{E}\,(\text{kgcm})^{-1}\,, \quad \varepsilon = 8{,}8213\,.$$

Aus (70a) erhält man $M_{\varphi 0} = 0{,}047\,198\,q\,r^2$, und aus (73b), (74a) und den Bedingungen 6) bis 9)

$$\vartheta_0 = 0{,}011\,565\,\frac{q\,r^2}{E}\,, \qquad \vartheta_0'' = -\,0{,}40\,297\,\frac{q\,r^2}{E}\,.$$

Aus (12a) erhält man mit (27) bis (29) und (32)

$$\sigma_1 = \frac{M_\varphi}{r+\eta}\,\zeta\,\beta_2\,E,\tag{75}$$

was in diesem Fall ($r = r_1$) identisch mit der Biegespannung ist, die nach *Odqvist* berechnet werden kann.

Die Spannungsverteilung σ für $\varphi = 0$ bis 30° ist aus Abb. 8 ersichtlich, wo die σ_1 entsprechende Spannung mit gestrichelten Linien dargestellt ist. Die aus der Wölbbehinderung herstammenden Spannungen σ_2 sind offensichtlich erheblich größer als die reinen Biegespannungen nach (75). Gleichzeitig werden auch die Verformungen in hohem Maße beeinflußt.

Die Gleichungen (53) und (54) der *Odqvist*schen Theorie ergeben für diesen Fall mit den Randbedingungen $\psi_0 = \psi(\varphi_1) = 0$

$$\vartheta_0 = q\,r^2\,\frac{\gamma_1+\beta_2}{2\sin\varphi_1}\,(2\sin\varphi_1-\varphi_1-\varphi_1^2\,\operatorname{ctg}\varphi_1)\,,\tag{76}$$

$$\vartheta = \vartheta_0\cos\varphi - q\,r^2\,(\gamma_1+\beta_2)\Big[\frac{\varphi_1}{2\sin\varphi_1}\,\varphi\sin\varphi+\cos\varphi-1\Big],\tag{77}$$

und

$$\psi = -\,\vartheta_0\sin\varphi - q\,r^2\,(\gamma_1+\beta_2)\Big[\frac{\varphi_1}{2\sin\varphi_1}\,(\varphi\cos\varphi+\sin\varphi)-\sin\varphi\Big]-\gamma_1\,M.\tag{78}$$

[1] *F. W. Bornscheuer*, Stahlbau, 22 (1953), S. 34.

Die Ergebnisse für ϑ und ψ berechnet aus (77) und (78), sind in Abb. 9 mit gestrichelten Linien zusammen mit den Werten aus (73) und (74) eingetragen.

Berichtigung bei der Korrektur. Veranlaßt durch eine briefliche Mitteilung von Herrn *D. Rüdiger* an Herrn *F. Odquist* möchten wir hervorheben, daß die Gleichung (7) oben einer Korrektur bedarf, die in gewissen Fällen von Bedeutung sein kann. Es ist das Glied u/r bei der Verdrehung der Bogentangente zu berücksichtigen, was dazu führt, daß im letzten Gliede der großen Klammer in (7) sowie in den folgenden Gleichungen (24) bis (29) v'' durch $v'' - u'$ zu ersetzen ist. Man sieht dann, daß die Kombination von (27) und (29) im Specialfall $D = 0$ zu der bekannten *Resal-Winkler*schen Gleichung für v führt. Die Gleichungen für ϑ, ψ und w bleiben unberührt. Hingegen sind die Gleichungen (34), (35) und (45) durch folgende zu ersetzen:

$$v' = v'_0 \cos\varphi - v_0 \sin\varphi + (\beta_1 r + \beta_2 \zeta_0) \int_0^\varphi M_\varphi \cos(\varphi - \lambda)\, d\lambda - (\beta_1 \zeta_0 + \beta_3 r) \int_0^\varphi M_z \cos(\varphi - \lambda)\, d\lambda$$
$$+ (\beta_1 r_1 \zeta_0 + \beta_2 \zeta_0^2 - 2\beta_1 \zeta_0 \eta_0 - \beta_3 r \eta_0) \int_0^\varphi N \cos(\varphi - \lambda)\, d\lambda\,, \tag{34}$$

$$v = v'_0 \sin\varphi + v_0 \cos\varphi + (\beta_1 r + \beta_2 \zeta_0) \int_0^\varphi M_\varphi \sin(\varphi - \lambda)\, d\lambda - (\beta_1 \zeta_0 + \beta_3 r) \int_0^\varphi M_z \sin(\varphi - \lambda)\, d\lambda$$
$$+ (\beta_1 r_1 \zeta_0 + \beta_2 \zeta_0^2 - 2\beta_1 \zeta_0 \eta_0 - \beta_3 r \eta_0) \int_0^\varphi N \sin(\varphi - \lambda)\, d\lambda, \tag{35}$$

$$u = u_0 + v'_0 \cos\varphi - v_0 \sin\varphi + (\beta_1 r + \beta_2 \zeta_0) \int_0^\varphi M_\varphi \cos(\varphi - \lambda)\, d\lambda - (\beta_1 \zeta_0 + \beta_3 r) \int_0^\varphi M_z \cos(\varphi - \lambda)\, d\lambda$$
$$+ (\beta_1 r_1 \zeta_0 + \beta_2 \zeta_0^2 - 2\beta_1 \zeta_0 \eta_0 - \beta_3 r \eta_0) \int_0^\varphi N \cos(\varphi - \lambda)\, d\lambda - \beta_1 r_1 \int_0^\varphi M_\varphi\, d\lambda$$
$$+ \left(\alpha \frac{r_1}{r} + \beta_3 r_1\right) \int_0^\varphi M_z\, d\lambda + \left(\alpha \frac{r_1^2}{r} + \beta_3 \eta_0 r_1 - \beta_1 r_1 \zeta_0\right) \int_0^\varphi N\, d\lambda\,. \tag{45}$$

Die durchgerechneten Beispiele und zpeziell die Gleichungen (67) bis (78) bleiben auch unverändert.

In der oben zitierten Arbeit von *F. Odqvist*[1] sind dieselben Korrekturen zu machen. Bei dem dort behandelten Beispiel eines Ringes mit radialen Kräften sind die Gleichungen (67) und (68) entsprechend zu korrigieren.

(Eingegangen am 13. Mai 1955.)

Anschrift des Verfassers: Civilingenjör *A. Björklund*, Stockholm Sö (Schweden), Tjärhovsgatan 22.

[1] *F. K. G. Odquist*, Ing.-Arch. 22 (1954) S. 98.

Die Berechnung von Tragflügelprofilen aus der Druckverteilung

Von R. Eppler

1. Einleitung und Übersicht. Die Tragflügelprofile mit vorgegebener Druckverteilung wurden schon seit langer Zeit für vorteilhaft erachtet[1, 2]. Erst als jedoch die Ergebnisse der Grenzschichttheorie und ihre experimentelle Bestätigung sowie die Annäherung der Fluggeschwindigkeiten an die Schallgrenze genaue und praktisch wichtige Anforderungen an die Druckverteilungen stellten, wurden die Berechnungsverfahren so weit durchgebildet, daß sie praktisch zu vielen Beispielen verwertet werden konnten.

Die bekannteste und am meisten verwandte Methode wurde von *Th. Theodorsen* entwickelt. Sie geht aus von dem bekannten „*Theodorsen*-Verfahren"[3] zur konformen Abbildung beliebiger Flügelprofile auf den Kreis, das in bekannter Weise erst das Profil auf eine kreisähnliche Figur abbildet und diese durch einen Iterationsprozeß vollends auf den Kreis. Mit der mittelbaren Abbildungsfunktion läßt sich die Geschwindigkeitsverteilung am Profil angeben. Die von *Theodorsen* durchgeführte Berechnung von Profilen mit vorgegebener Geschwindigkeitsverteilung[4] stellt genau die Umkehrung des ersten Verfahrens dar. Seine Formeln bilden die Grundlage für ein Iterationsverfahren zur Erzielung vorgegebener Geschwindigkeitsverteilung und zur Berechnung der zugehörigen Profile.

Der Rechenaufwand dieses Verfahrens ist jedoch schon bei einem einzelnen Iterationsschritt recht erheblich. Außerdem wurde die Iteration bis jezt nur für symmetrische Profile bei verschwindendem Anstellwinkel durchgeführt. Da aber die berechneten Profile nicht nur bei einem einzigen Anstellwinkel bzw. Flugzustand günstige Geschwindigkeitsverteilungen haben sollten[5], mußten parallel zur Iteration immer noch die Geschwindigkeitsverteilungen bei einigen nicht verschwindenden Anstellwinkeln mit verfolgt werden, was wieder zusätzlichen Aufwand erforderte. Die Berechnung gewölbter Profile wäre mit diesem Verfahren zwar prinzipiell auch möglich gewesen, hätte aber noch ein Vielfaches an Aufwand gegenüber den symmetrischen Profilen erfordert. Deshalb wurden die unsymmetrischen Profile nicht mehr mit der konformen Abbildung behandelt, sondern durch lineare Überlagerung einer Wirbelverteilung gewonnen. Diese Näherung ist für geringe Wölbungen gut brauchbar, bei stärkeren kommen jedoch zu große Ungenauigkeiten ins Spiel, wie wir hier später noch sehen werden.

Insgesamt waren das von *Theodorsen* entwickelte Verfahren als erstes seiner Art und noch mehr die in großer Zahl damit erzielten Ergebnisse sehr wertvoll; es bestand aber schon lange der dringende Bedarf nach einem bequemeren Verfahren, das möglichst auch noch die unsymmetrischen Profile exakter erfassen sollte.

Die erste Forderung führte zu einigen konsequenten Näherungsverfahren. Das neueste davon dürfte dasjenige von *E. Truckenbrodt*[6] sein, das an einige Arbeiten von *F. Riegels*[7] anschließt. Dieses Verfahren ist im Aufwand sehr erträglich und hat sich im praktischen Gebrauch gut bewährt. Abgesehen von der unkontrollierbaren Güte der Näherung ist jedoch mathematisch unbefriedigend, daß es von vorn herein nur von einer frei gewählten Geschwindigkeitsverteilung ausgeht. Da eine solche prinzipiell nicht ganz willkürlich ist, sondern zu einem geschlossenen Profil gehören muß, können dadurch Unverträglichkeiten in Form von Selbstüberschneidungen oder unbeabsichtigt stumpfen Hinterkanten auftreten. Diese müssen durch Probieren oder durch praktische Erfahrung so klein gehalten werden, daß sie ohne weitere Rechnung vollends korrigiert werden können. Desgleichen ist man auch bezüglich der Dicke des entstehenden Profils auf die Erfahrung angewiesen, da man auch diese Größe der vorgegebenen Geschwindigkeitsverteilung nicht ansehen kann.

[1] *F. Weinig*, Z. angew. Math. Mech. 9 (1929), S. 507.
[2] *A. Betz*, Luftfahrtforschung 11 (1934), S. 158.
[3] *Th. Theodorsen*, Theory of Wing Sections of Arbitrary Shape. NACA-Report No. 411 (1931).
[4] *Th. Theodorsen*, Airfoil-Contour Modification Based on ε-Curve Method of Calculation Pressure Distribution. NACA ARR No. L4 G05, 1944. Verkürzte Wiedergabe in *I. H. Abbott*, *A. E.* von *Doenhoff* and *L. S. Stivers*, Summary of Airfoil Data. NACA-Report No. 824 (1945).
[5] Die physikalischen Gründe hierfür sind in NACA-Report 824, a. a. O. dargestellt.
[6] *E. Truckenbrodt*, Ing.-Arch. 19 (1951), S. 365.
[7] *F. Riegels*, Ing.-Arch. 16 (1948), S. 373 (I. Mitteilung), 17 (1949), S. 94 (II. Mitteilung) und 18 (1950), S. 329 (Berichtigung).

In der vorliegenden Arbeit wird nun wieder mit konformer Abbildung exakt gearbeitet, es wird jedoch der Umweg über die kreisähnliche Figur des *Theodorsen*-Verfahrens eingespart. Dadurch vereinfachen sich alle Formeln so sehr, daß im Endeffekt kein wesentlich größerer Rechenaufwand mehr nötig ist, als beim *Truckenbrodt*schen Näherungsverfahren. Die Möglichkeiten der Geschwindigkeitsvorgabe sind noch allgemeiner als dort, auch bei unsymmetrischen Profilen. Die Schließungs- und Verträglichkeitsbedingungen werden sorgfältig erfüllt und die Profildicke auf einfache Weise reguliert.

2. Der Ansatz und die grundlegenden Formeln. Die konforme Abbildung, die zur Berechnung der unendlich ausgedehnten Parallelströmung um eine Kontur benötigt wird, bildet das Äußere dieser Kontur auf das Äußere des Kreises ab. Soll die Kontur in der z-Ebene (Abb. 1) mit

$$z = x + i\,y \qquad (1)$$

liegen und die Kreisebene mit ζ bezeichnet werden, dann muß für die Abbildungsfunktion $z(\zeta)$

$$z(\infty) = \infty\,,$$
$$\frac{dz}{d\zeta}(\zeta = \infty) = \text{reell} \qquad (2)$$

gelten, damit in z- und ζ-Ebene die gleichen Anströmbedingungen vorhanden sind. Ist die Abbildungsfunktion $z(\zeta)$ bekannt, dann kann man jede Strömung der ζ-Ebene auf die z-Ebene übertragen. Soll in der z-Ebene eine Strömung vom Anstellwinkel α um die Kontur entstehen, dann muß wegen (2) als Grundlage in der ζ-Ebene eine ebensolche Strömung um den Kreis genommen werden. In der z-Ebene verläßt die Strömung das Profil an der Hinterkante, wodurch eine Zirkulation Γ und ein Auftrieb bedingt ist. Wir können das Profil der z-Ebene so gedreht voraussetzen, daß die Funktion $z(\zeta)$ unter den Bedingungen (2) die Hinterkante des Profils nach $\zeta = 1$ abbildet.

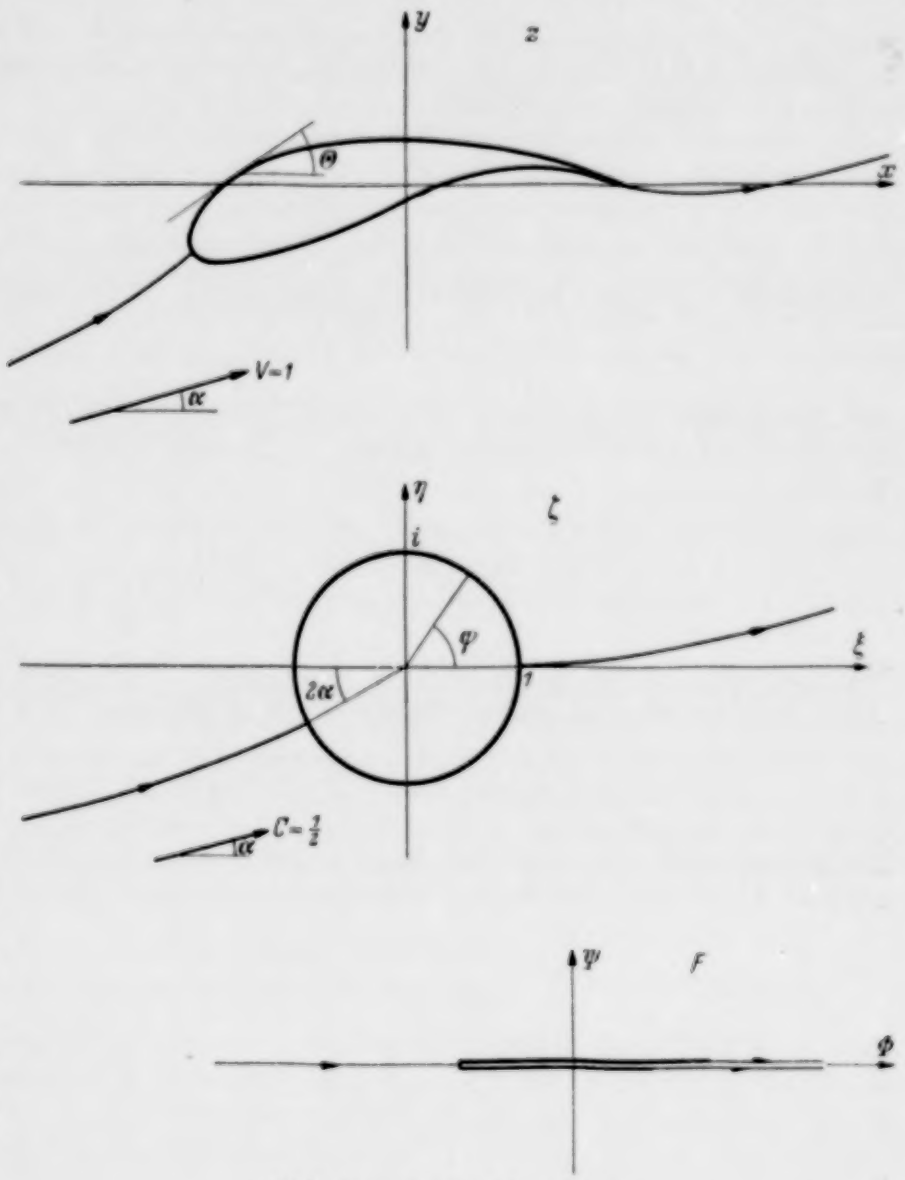


Abb. 1. Skizze der eingeführten Ebenen.

Dann muß in der ζ-Ebene der hintere Staupunkt bei $\zeta = 1$ liegen. Wir erreichen dies in bekannter Weise mit dem komplexen Potential

$$F(\zeta) = \Phi + i\,\Psi = C\left(e^{-i\alpha}\,\zeta + e^{i\alpha}\,\frac{1}{\zeta}\right) - \frac{\Gamma}{2\,\pi\,i}\,\ln\zeta \qquad (3)$$

der Parallelströmung vom Anstellwinkel α um den Kreis mit der überlagerten Zirkulation

$$\Gamma = 4\,\pi\,\sin\alpha\cdot C\,. \qquad (4)$$

Mit der Abbildungsfunktion $z(\zeta)$ und (3) hat man das komplexe Potential der z-Ebene als mittelbare Funktion und kann damit dort alle interessierenden Größen berechnen. Für $z(\zeta)$ machen wir ohne weitere Zwischenabbildung direkt den Ansatz

$$z = \frac{1}{2}\left(\zeta + \frac{1}{\zeta}\right) - \sum_{\nu=0}^{n} (a_\nu + i\,b_\nu)\,\zeta^{-\nu}\,, \qquad (5)$$

wobei die Potenzreihe in $|\zeta| \geq 1$ gleichmäßig konvergent sein soll. Der Ansatz (5) erfüllt sicher die

Bedingungen (2). Sind alle $a_\nu, b_\nu = 0$, dann entsteht in der z-Ebene als Bild des Kreises der geradlinige Schlitz bzw. die Strömung um die ebene Platte. Nicht verschwindende a_ν, b_ν ergeben gewisse Abweichungen von der ebenen Platte. Sind sie nicht groß, dann entstehen flache Profile.

Nehmen wir zunächst an, die a_ν, b_ν seien bekannt, dann folgt aus (5) mit $\zeta = e^{i\varphi}$ für das in der z-Ebene entstehende Profil die Parameterdarstellung

$$x = \cos\varphi - \sum_{\nu=0}^{\infty} (a_\nu \cos\nu\varphi + b_\nu \sin\nu\varphi)\,, \tag{6}$$

$$y = \sum_{\nu=0}^{\infty} (a_\nu \sin\nu\varphi - b_\nu \cos\nu\varphi)\,. \tag{7}$$

Ein zur x-Achse symmetrisches Profil entsteht, wenn alle $b_\nu = 0$ sind. Beim Übergang von φ nach $-\varphi$ ändert dann y sein Zeichen, während x erhalten bleibt. Der Geschwindigkeitsbetrag v in der z-Ebene ist allgemein

$$v = \left|\frac{dF}{dz}\right| = \frac{\left|\frac{dF}{d\zeta}\right|}{\left|\frac{dz}{d\zeta}\right|}\,. \tag{8}$$

Wir wählen in (3) die Konstante $C = \frac{1}{2}$, dann wird die Anströmgeschwindigkeit

$$V = v(\infty) = 1\,, \tag{9}$$

und die Geschwindigkeit v ist identisch mit dem sonst häufig gebräuchlichen Geschwindigkeitsverhältnis v/V. Für die Geschwindigkeit am Profil setzen wir $z = e^{i\varphi}$ und erhalten aus (8) mit (3) und (5)

$$v(e^{i\varphi}) = \frac{\left|\frac{1}{2}(e^{-i\alpha} - e^{i\alpha}\,e^{-2i\varphi}) + i\sin\alpha\,e^{-i\varphi}\right|}{\left|\frac{dx + i\,dy}{i\,e^{i\varphi}\,d\varphi}\right|}\,. \tag{10}$$

Wir kennzeichnen die Ableitung nach φ mit einem Punkt, nach x mit einem Strich, die anderen Ableitungen werden als Differentialquotienten ausgeschrieben. Dann folgt aus (10)

$$v(e^{i\varphi}) = \frac{\sin(\varphi-\alpha) + \sin\alpha}{\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}}\,. \tag{11}$$

Die Betragstriche lassen wir bei dieser reellen Größe weg. Sie bekommt damit einfach das Vorzeichen des Zählers. Die Wurzel bleibt positiv. Formen wir danach (11) noch um zu

$$v(\varphi) = \frac{\sin(\varphi-\alpha) + \sin\alpha}{\sqrt{1 + y'^2}\,(-\dot{x}(\varphi))} = \frac{[\sin(\varphi-\alpha) + \sin\alpha]\cos\Theta}{-\dot{x}(\varphi)}\,, \tag{12}$$

dann muß die Wurzel und deren Reziprokwert $\cos\Theta$ (Θ = Steigungswinkel des Profils nach Abb. 1) das Vorzeichen von $-\dot{x}(\varphi)$ haben. Das Minuszeichen ist dabei unwesentlich. Es wird eingeführt, damit $\cos\Theta$ auf der Oberseite des Profils positiv wird.

Die Gleichungen (6), (7) und (11) oder (12) geben bei bekannten a_ν, b_ν Profil und Geschwindigkeit in Abhängigkeit von φ.

In (11) ist der Nenner unabhängig von α. Ändert man also in der ζ-Ebene α, dann muß sich v nach

$$v(\varphi, \bar{\alpha}) = \frac{\sin(\varphi-\bar{\alpha}) + \sin\bar{\alpha}}{\sin(\varphi-\alpha) + \sin\alpha}\, v(\varphi, \alpha) \tag{13}$$

ebenfalls ändern. In diese Gleichung geht das Profil nicht ein.

Der Auftrieb in der z-Ebene ist nach dem *Kutta*schen Satz, wenn ϱ die Dichte des strömenden Mediums ist,

$$A = \varrho\, V\, \Gamma\,, \tag{14}$$

wobei Γ auch in der z-Ebene den Wert (4) hat, da sich die Zirkulation bei der konformen Abbildung nicht ändert. Der Auftriebsbeiwert ist dann

$$c_a = \frac{A}{\frac{\varrho}{2} V^2 l} = 4\pi \sin\alpha \cdot \frac{1}{l}\,. \tag{15}$$

Die Länge l des Profils hat dabei nach (6) bei der ebenen Platte den Wert $l = 2$, bei dickeren Profilen wird sie etwas kleiner sein, da dort der Auftriebsbeiwert allgemein etwas größer ist[1]. Der Auftrieb verschwindet bei $\alpha = 0$. Die für die Abbildung der Hinterkante getroffene Festlegung bewirkt also eine zur x-Achse parallele Nullauftriebsrichtung.

Für das Moment M_0 der Luftkräfte bei verschwindendem Auftrieb erhalten wir ebenfalls in einfacher Weise, z. B. nach *H. Glauert*[2], wenn wir es in mathematisch negativem Sinn positiv zählen,

$$M_0 = \frac{\varrho}{2} \cdot 2\pi b_1 \tag{16}$$

und für den entsprechenden Momentbeiwert

$$c_{m0} = \frac{2\pi b_1}{l^2} . \tag{17}$$

Die abgeleiteten Formeln sind nicht neu. Beispielsweise haben *F. Riegels* und *H. Wittich*[3] schon versucht, mit ihnen das Problem der vorgegebenen Kontur ohne die *Theodorsen*sche Zwischenabbildung zu lösen. Dieser Versuch brachte allerdings nur bei symmetrischen Konturen Gewinn. Bei den unsymmetrischen ist die Konvergenz des auf (6) und (7) aufgebauten Iterationsverfahrens fraglich und schlecht, so daß das *Theodorsen*-Verfahren hier allgemein vorzuziehen ist. Die Schwierigkeiten bei der Bearbeitung des vorgegebenen Profils haben *F. Riegels* dazu veranlaßt, Gleichung (12) für symmetrische Profile zu linearisieren, was einem Quell-Senken-Verfahren gleichkommt[4]. Dieses wurde mittels Wirbelverteilungen und Korrekturen auf unsymmetrische Profile ausgedehnt[5] und diente auch *E. Truckenbrodt* als Grundlage zu seiner Bearbeitung der vorgegebenen Geschwindigkeitsverteilung[6].

Wir werden im folgenden erkennen, daß die gesamten Schwierigkeiten, welche die Einsparung des *Theodorsen*schen Umwegs über die kreisähnliche Figur beim Problem der vorgegebenen Kontur mit sich bringt, bei der Umkehrung vollkommen wegfallen. Bei der Aufgabe der vorgegebenen Geschwindigkeit ist eine Linearisierung überflüssig. Die Einsparung der kreisähnlichen Figur, die beim Problem der vorgegebenen Kontur andere Nachteile mit sich brachte, wirkt sich jetzt voll aus. Man spart sehr viel Aufwand und hat bei der Vorgabe der Geschwindigkeit noch besonders vorteilhafte Möglichkeiten.

3. Die Vorgabe der Geschwindigkeitsverteilung. Wenn wir nun die abgeleiteten Formeln dazu benützen, Profile mit günstigen Geschwindigkeitsverteilungen zu berechnen, dann wollen wir von vorn herein auf das numerische Endergebnis hinarbeiten und uns demnach auch ganz von den praktischen Anforderungen leiten lassen, die an dieses Ergebnis gestellt werden. Es geht darum, die in der vorangehenden Ziffer eingeführten Koeffizienten a_ν, b_ν so zu bestimmen, daß durch (6) und (12) eine vorgegebene Geschwindigkeitsverteilung dargestellt wird. Für diese Aufgabe bietet Gleichung (12) einige ausgezeichnete Möglichkeiten.

Wir folgern aus (12) und (6)

$$-\dot{x}(\varphi) = \sin\varphi - \sum_{\nu=1}^{\infty} (\nu\, a_\nu \sin\nu\varphi - \nu\, b_\nu \cos\nu\varphi) = \frac{\sin(\varphi - \alpha) + \sin\alpha}{\omega(\varphi)} , \tag{18}$$

wobei wir

$$\omega(\varphi) = \sqrt{1 + y'^2}\; v(\varphi) \tag{19}$$

eingeführt haben. Wählen wir in (18) einen Anstellwinkel $\alpha = \alpha^*$ und eine Funktion $\omega(\varphi)$, dann können wir durch harmonische Analyse sofort Koeffizienten a_ν, b_ν bestimmen, die mit (6), (7) und (12) ein Profil und eine Geschwindigkeitsverteilung liefern. Bei dem in (18) gewählten α^* ist diese nach (12) speziell

$$v(\varphi, \alpha^*) = \frac{\omega(\varphi)}{\sqrt{1 + y'^2}} , \tag{20}$$

bei einem anderen α folgt sie hieraus mittels (13). Für die Größe y' in der Wurzel ist $\dot{x}$ direkt durch (18) gegeben, $\dot{y}$ aus den a_ν, b_ν mittels

$$\dot{y}(\varphi) = \sum_{\nu=1}^{\infty} (\nu\, a_\nu \cos\nu\varphi + \nu\, b_\nu \sin\nu\varphi) \tag{21}$$

zu berechnen.

---

[1] *W. Weinberger*, Luftfahrtforschung 17 (1940), S. 3.

[2] *H. Glauert*, Die Grundlagen der Tragflügel- und Luftschraubentheorie, Berlin 1929.

[3] *F. Riegels, H. Wittich*, Zur konformen Abbildung beliebiger Profile auf den Kreis und Bestimmung der Druckverteilung in ebener inkompressibler Strömung, Bericht 42/*A*/20 der AVA Göttingen, 1942.

[4] *F. Riegels*, Fußnote 7 von S. 436, I. Mitteilung.

[5] *F. Riegels*, Fußnote 7 von S. 436, II. Mitteilung.

[6] *E. Truckenbrodt*, Fußnote 6 von S. 436.

Es fragt sich nun nur, wie man durch die Wahl von $\omega(\varphi)$ erreichen kann, daß die in Parameterform (6) und (20) dazu entstehende Geschwindigkeitsverteilung eine im Voraus festgelegte Form erhält. Diese Frage ist leicht zu beantworten, solange wir es mit relativ flachen Konturen zu tun haben, wie es Flügelprofile praktisch immer sind. Bei ihnen sind wegen (7) die a_ν, b_ν klein gegen 1, also ist nach (6)

$$x(\varphi) \approx \cos\varphi \,. \tag{22}$$

Zudem ist y' außer im Bereich der Profilnase klein, wir haben also fast am ganzen Profil nach (20)

$$v(\varphi, \alpha^*) \approx \omega(\varphi) \,. \tag{23}$$

Durch (22) und (23) ist schon eine Näherung für die Verteilung $v(x, \alpha^*)$ gegeben. Gleichung (6) bewirkt demgegenüber noch eine kleine Verschiebung in x-Richtung, die man nach wenigen Beispielen gut von vorn herein beurteilen kann. Der Einfluß des Wurzelfaktors in (18) ist qualitativ ebenfalls klar. Er ist nur in der Umgebung der Flügelnase stark. Dort bewirkt das groß werdende y' ein Absinken der Geschwindigkeit, das dort ohnehin wegen der Nähe des vorderen Staupunkts vorhanden ist. Die durch die Wahl von $\omega(\varphi)$ entstehende Geschwindigkeitsverteilung ist also von vorn herein weitgehend zu übersehen.

Wir gehen also von der Funktion $\omega(\varphi)$ aus und berechnen daraus ein Profil und die zu ihm (im Rahmen der noch zu klärenden Rechengenauigkeit) exakt gehörende Geschwindigkeitsverteilung. Weicht sie zu sehr von dem ab, was wir ursprünglich beabsichtigt haben, dann können wir immer durch einen kleinen Zusatz in der Funktion $\omega(\varphi)$ noch Korrekturen anbringen.

Man könnte so ein ganzes Iterationsverfahren aufbauen. Praktisch kommt es jedoch immer nur an wenigen Stellen des Profils auf eine Verbesserung der entstehenden Verteilung an, etwa da wo konstante Geschwindigkeit entstehen soll, in deren Bereich dann die Stabilität der laminaren Grenzschicht sehr empfindlich ist. In allen anderen Fällen kann man sich mit der entstehenden, nach (22) und (23) von vorn herein ungefähr festzulegenden Geschwindigkeit begnügen. Wir beschreiben deshalb kein Iterationsverfahren, sondern beschränken uns auf e i n e Korrektur, die bisher stets ausgereicht hat.

Daß die Geschwindigkeit $v(x)$ auf diesem Weg nicht direkt vorgegeben wird, ist kein Nachteil des Verfahrens, denn sie kann ohnehin nicht ganz beliebig vorgegeben werden. Sie muß zu einem geschlossenen Profil gehören, also noch gewisse Bedingungen erfüllen[1], damit aus ihr überhaupt ein sinnvolles Profil berechnet werden kann. Man muß also freie Parameter in die Rechnung mitnehmen, die nachträglich festgelegt werden, und die somit auch Abweichungen von der ursprünglichen Vorgabe mit sich bringen.

Bei unserem Vorgehen müssen sich die genannten Bedingungen auf die Ausgangsfunktion $\omega(\varphi)$ übertragen. Es wird sich als besonderer Vorteil erweisen, daß sie hier sehr einfach werden und leicht zu erfüllen sind.

Selbstverständlich müssen wir von $\omega(\varphi)$, beziehungsweise von der in (18) damit gebildeten Funktion

$$h(\varphi) = \frac{\sin(\varphi - \alpha) + \sin\alpha}{\omega(\varphi)} \tag{24}$$

eine gewisse Glattheit verlangen. Wir bleiben genügend allgemein und vermeiden alle weiteren Schwierigkeiten, wenn wir verlangen, daß $h(\varphi)$ stückweise analytisch ist und als höchste Singularitäten Knicke, d. h. Sprungstellen in der ersten Ableitung haben soll. Damit werden die a_ν, b_ν von der Ordnung $1/\nu^3$ [2], und alle auftretenden Reihen konvergieren gleichmäßig.

Die ganze Stetigkeitsforderung wird an sich später illusorisch, wenn wir von den *Fourier*-Reihen auf endliche Polynome übergehen, welche $h(\varphi)$ durch eine überall analytische Funktion interpolieren. Praktisch ist aber die Glattheit von $h(\varphi)$ auch dann noch wichtig, weil von ihr die Größenordnung der vernachlässigten höheren a_ν, b_ν und damit die Zahl der bei genügender Genauigkeit mitzunehmenden Koeffizienten abhängt. Auch hierfür wird sich unsere Forderung als ausreichend erweisen.

Weitere Bedingungen müssen sich vor allem auf die Schließung des entstehenden Profils beziehen. Eine solche Bedingung ist bei uns in (18) schon enthalten. Dort beginnt die Reihe mit dem Glied $\nu = 1$, also muß das Absolutglied

$$a_0 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} h(\varphi)\, d\varphi = 0 \tag{25}$$

[1] Vergleiche beispielsweise auch *A. Betz*, Fußnote 2 von S. 436.

[2] *H. v. Mangoldt — K. Knopp*, Einführung in die höhere Mathematik, Bd. 3, S. 508, Leipzig 1944.

sein. Wäre (25) nicht erfüllt, dann würde das durch Integration aus $\dot{x}(\varphi)$ zu gewinnende $x(\varphi)$ nicht periodisch, das entstehende Profil würde sich nicht schließen. Wir nennen deshalb (25) die Schließungsbedingung.

Diese Bedingung kann aber noch nicht alles enthalten, denn sie ist bei symmetrischen Profilen, bei denen $\dot{x}(\varphi)$ eine ungerade Funktion ist, automatisch erfüllt, und auch dort ist die Geschwindigkeitsverteilung nicht willkürlich. Es liegt nahe, ebenso wie bei $x(\varphi)$ auch bei $y(\varphi)$ die Periodizität nachzuprüfen. Sie erweist sich aber gleichzeitig mit derjenigen von $x(\varphi)$ wegen (6) und (7) als erfüllt. Für die Schließung des Profils reicht also (25) aus. Dagegen kann in einer anderen Hinsicht bei der Wahl von $\omega(\varphi)$ noch eine unbeabsichtigte Wirkung auftreten. Wir wollen normalerweise an der Hinterseite des Profils eine Spitze erzielen, an der die Strömung glatt, also mit einem endlichen, nicht verschwindenden v abfließen kann. Entsprechend werden wir $\omega(0) \neq 0$ vorgeben. In (18) erkennen wir aber, daß trotzdem immer $\dot{x}(0) = 0$ ist, während im allgemeinen $\dot{y}(0) \neq 0$ wird. Für das Gegenteil ist jedenfalls keinerlei Ursache vorhanden. Wir erhalten also bei $\varphi = 0$ im allgemeinen $y' = \infty$, und nach (19) $v = 0$. Dies gibt genau den Staupunkt, den wir vermeiden wollten. Er kann sogar leicht noch so liegen, daß die senkrechte Tangente im Rahmen einer schleifenförmigen Selbstüberschneidung des Profils auftritt. Um dies alles zu vermeiden, müssen wir bei $\varphi = 0$ außer dem endlichen $\omega(0)$ auch noch

$$\dot{y}(0) = \sum_{\nu=1}^{\infty} \nu\, a_\nu = 0 \tag{26}$$

verlangen. Wir nennen dies die „Spitzenbedingung".

Das Aussehen der Hinterkante bei Berücksichtigung der Spitzenbedingung wird durch die Größe $\dot{y}(0)/\ddot{x}(0)$ bestimmt. Ist die entstehende Kontur symmetrisch, dann verschwindet $\ddot{y}(0)$ als ungerade Funktion, wenn ihre Reihe gut genug konvergiert, insbesondere wenn sie nur endlich viele Glieder hat. Wir bekommen dann verschwindenden Hinterkantenwinkel, wie es bei dem nicht verschwindenden $\omega(0)$ zu erwarten ist.

Bei unsymmetrischen Konturen kann $y'(\varphi = 0)$ trotz (26) noch unendlich werden. Hat nämlich $h(\varphi)$ bei $\varphi = 0$ einen Knick, was durch eine Sprungstelle in $\omega(\varphi)$ entstehen kann, dann bekommt $\ddot{x}(\varphi)$ bei $\varphi = 0$ eine Sprungstelle und $\ddot{y}(\varphi)$ eine logarithmische Singularität. Wegen $\dot{y} = 0$ entsteht aber keine stumpfe Hinterkante, sondern eine senkrecht stehende Spitze am Profil. Man könnte dies vermeiden, indem man für $\omega(\varphi)$ bei $\varphi = 0$ Stetigkeit verlangt. Praktisch ist dies aber nicht nötig, weil die entstehende Singularität sehr schwach ist und nur eine kleine Umgebung der Hinterkante einnimmt. Vor allem, wenn man nachher mit endlichen trigonometrischen Polynomen arbeitet, ist sie effektiv nicht mehr zu spüren. Man nimmt sie in Kauf, ebenso wie dies bei der Theorie der Wirbelverteilungen geschieht.

Die Bedingung (26) ist genau das, was bei *Truckenbrodt*[1] nur ungefähr durch die Erfahrung erfüllt wird. Man könnte diese Forderung auch dort noch einführen. Allerdings erfordert dies zusätzlichen Aufwand, so daß bei Berücksichtigung der Spitzenbedingung das dortige Verfahren nicht mehr wesentlich einfacher ist als das vorliegende.

Die bis jetzt abgeleiteten Bedingungen für Stetigkeit, Schließung und Spitze garantieren diese speziellen Eigenschaften. Streng genommen können unter diesen Bedingungen immer noch unmögliche Profilformen entstehen. Mit einigem Geschick kann man $\omega(\varphi)$ beispielsweise so vorgeben, daß ein Profil mit negativer Dicke entsteht. Diese Möglichkeiten schließen wir aber nicht mehr gesondert aus. Sie sind im praktischen Gebrauch leicht zu vermeiden. Wir gehen also grundsätzlich von α^* und $\omega(\varphi)$ aus, prüfen nur mittels (25) und (26) Schließungs- und Spitzenbedingung nach und arbeiten dann in der eingangs dieser Ziffer beschriebenen Weise.

Nach (14) und (15) ist durch den gewählten Anstellwinkel α^* der Auftrieb und der Auftriebsbeiwert c_a festgelegt. Man wählt also mit α^* von vorn herein den Auftrieb, den die aus $\omega(\varphi)$ entstehende Geschwindigkeitsverteilung $v(x, \alpha^*)$ liefern soll. Gleichung (25) zeigt dann, ob die Funktion $\omega(\varphi)$, die nach (23) ungefähr mit $v(\varphi, \alpha^*)$ übereinstimmt, richtig gewählt ist. Ist beispielsweise α^* positiv, dann muß die Geschwindigkeit v im Mittel auf der Unterseite kleiner sein als auf der Oberseite. Dies wird durch (25) automatisch geregelt. Wir können also leicht ein Profil entwerfen, dessen Geschwindigkeitsverteilung bei einem gewissen c_a vorgegebene Eigenschaften hat, was praktisch oft verlangt wird.

Wir haben aber in unseren Formeln eine noch nützlichere Möglichkeit. In (18), (24) und (25) ist grundsätzlich nur von den dort stehenden Funktionen von φ Gebrauch gemacht. Rein formal

[1] *E. Truckenbrodt*, Fußnote 6 von S. 436.

können wir in diesen Gleichungen auch α^* als Funktion von φ einführen, ohne am Wesen dieser Gleichungen und damit am ganzen Verfahren etwas zu ändern. Praktisch wichtig ist dabei nur eine stückweise konstante Funktion $\alpha^*(\varphi)$. Wir können sie trotz unserer Stetigkeitsforderung zulassen, da wir an den Sprungstellen von $\alpha^*(\varphi)$ mit Sprungstellen von $\omega(\varphi)$ stetiges $h(\varphi)$ erzeugen können. Dies wird später keine Schwierigkeiten machen.

Die nicht über das ganze Profil konstante Wahl von α^* erscheint zunächst vielleicht absurd, mindestens zwecklos. Sie bedeutet aber natürlich nicht, daß das entstehende Profil gleichzeitig unter verschiedenen Anstellwinkeln angeströmt wird. Vielmehr wird auch mit $\alpha^*(\varphi)$ nach (18) eine konkrete Funktion $\dot{x}(\varphi)$ und damit ein festes Profil definiert. An diesem Profil können wir dann nach (12) mit der Funktion $\dot{x}(\varphi)$ für jedes (selbstverständlich am ganzen Profil konstante) α eine Geschwindigkeitsverteilung berechnen. Diese ist, wenn wir $\dot{x}(\varphi)$ nach (18) in (12) einsetzen,

$$v(\varphi,\alpha) = \frac{\sin(\varphi-\alpha)+\sin\alpha}{\sin[\varphi-\alpha^*(\varphi)]+\sin\alpha^*(\varphi)}\,\frac{\omega(\varphi)}{\sqrt{1+y'^2}}\,. \tag{27}$$

Stimmt das gewählte α in einem φ-Bereich mit $\alpha^*(\varphi)$ überein, dann ist dort (27) identisch mit (20). Dort stimmt also $v(\varphi,\alpha)$ ungefähr mit $\omega(\varphi)$ überein. Da α nach (14) wieder den Auftrieb festlegt, können wir es somit erreichen, daß bei einem vorgegebenen $c_{a\,0}$ längs eines bestimmten Profilstücks (beispielsweise der Oberseite mit $0 \leq \varphi \leq \varphi_1 \approx \pi$) die Geschwindigkeit $v(\varphi, c_a)$ ungefähr mit der dortigen Vorgabe $\omega(\varphi)$ übereinstimmt, bei einem anderen c_{a1} die gleiche Eigenschaft längs eines anderen Profilstücks (z. B. der Unterseite) auftritt. Unsere Bedingungen (25) und (26) sorgen auch hier wieder automatisch dafür, daß alle nach (27) berechneten Geschwindigkeitsverteilungen mit den jeweils durch (14) dazu festgelegten Auftrieben verträglich sind. Diese Art der Geschwindigkeitsvorgabe, die bisher noch nirgends möglich war, wird sich als sehr wertvoll erweisen. Einige typische Anwendungen sind in Ziff. 5 enthalten.

4. Die praktische Durchführung. Für die praktische Durchführung unseres Verfahrens benötigen wir vor allem Rechenformulare zur harmonischen Analyse und Synthese, da wir diese Rechengänge mehrmals durchführen müssen. Wir nehmen für beide Operationen das *Runge*sche Verfahren. Bei ihm wird die zu analysierende Funktion im Intervall $(0,2\pi)$ an M äquidistanten Punkten berechnet, wobei M möglichst durch 3 und 4 teilbar sein soll, und die $M = 4N$ Ordinaten P_m werden durch ein trigonometrisches Polynom

$$P(\varphi) = \sum_{\nu=0}^{2N} (d_\nu \cos \nu\varphi + c_\nu \sin \nu\varphi) \tag{28}$$

mit $4N$ Koeffizienten interpoliert. Die Koeffizienten berechnen sich dabei mittels

$$\left.\begin{aligned}
d_\nu &= \frac{1}{2N}\sum_{m=1}^{4N} P_m \cos\left(\nu\frac{\pi m}{2N}\right) \quad (\nu = 1, 2, \ldots 2N-1)\,,\\
d_0 &= \frac{1}{4N}\sum_{m=1}^{4N} P_m\,,\\
d_{2N} &= \frac{1}{4N}\sum_{m=1}^{4N} P_m (-1)^m\,,\\
c_\nu &= \frac{1}{2N}\sum_{m=1}^{4N} P_m \sin\left(\nu\frac{\pi m}{2N}\right) \quad (\nu = 0, 1, \ldots 2N)\,,
\end{aligned}\right\} \tag{29}$$

also durch einfache Produktsummenbildung. Dabei kann man wegen der Periodizität der trigonometrischen Funktionen eine Menge von Faltungen durchführen, so daß beispielsweise bei $N = 12$ die längste zu berechnende Produktsumme anstatt 48 nur 6 Glieder hat. Für die gesamte Operation existieren fertige Rechenformulare, so daß wir hier nicht darauf eingehen[1]. Der Rechenaufwand ist dabei sehr erträglich. Bei $N = 12$, wie die Beispiele berechnet wurden, ist eine vollständige Analyse einschließlich kompletter Proben in etwa 4 Stunden leicht zu schaffen. Ganz ähnlich verläuft die Synthese einer Funktion $P(\varphi)$ an $4N$ äquidistanten Punkten.

Die Anwendung dieser Methoden bedeutet einerseits, daß man an Stelle der vorgegebenen Funktion $h(\varphi)$ in (18) mit einem trigonometrischen Polynom arbeitet, das an $4N$ Punkten mit $h(\varphi)$ übereinstimmt, andererseits, daß man Profil und Geschwindigkeitsverteilung zu diesem Polynom nur an

[1] *A. Hußmann*, Rechnerische Verfahren zur harmonischen Analyse und Synthese, Berlin 1938.

4 N Punkten berechnet. Beides gibt mit $N = 12$ sicher genügende Genauigkeit. Es ist aber keinerlei Schwierigkeit, auch mit anderen N-Werten zu arbeiten.

Die Verwendung der erwähnten Rechenformulare ist künftig zu verstehen, wenn wir von Analyse oder Synthese sprechen. Die hauptsächliche Rechenarbeit ist mit ihnen, wie wir sehen werden, zu bewältigen.

Die Funktion $\omega(\varphi)$ setzen wir, um Schließungs- und Spitzenbedingungen erfüllen zu können, in der Form

$$\frac{1}{\omega(\varphi)} = \sum_{i=1}^{K} k_i \, \gamma_i(\varphi) \tag{30}$$

an. Dabei sind zur Erfüllung von (25) und (26) mindestens $K = 2$ Parameter k_i notwendig. Wir nehmen aber meist noch mindestens einen weiteren mit, um die Dicke des Profils und andere Eigenschaften regeln zu können. Die $\gamma_i(\varphi)$ müssen so gewählt werden, daß die durch (30) definierte Funktion $\omega(\varphi)$ die gewünschten Eigenschaften bekommt und daß zu einer unstetigen Wahl $\alpha^*(\varphi)$ eine stetige Funktion $h(\varphi)$ nach (24) entsteht. Wie dies im Einzelfall geschieht, ist an den Beispielen der nächsten Ziffer zu erkennen.

Gehen wir mit (30) in (18) ein, so folgt

$$\sin\varphi - \sum_{\nu=1}^{2N} (\nu\, a_\nu \sin\nu\varphi - \nu\, b_\nu \cos\nu\varphi) = \{\sin[\varphi - \alpha^*(\varphi)] + \sin\alpha^*(\varphi)\} \sum_{i=1}^{K} k_i \, \gamma_i(\varphi) \, . \tag{31}$$

Wir führen die Analysen der den einzelnen k_i proportionalen Anteile getrennt durch. Wir setzen

$$\sum_{\nu=0}^{2N} (d_{\nu i} \cos\nu\varphi + c_{\nu i} \sin\nu\varphi) = \{\sin[\varphi - \alpha^*(\varphi)] + \sin\alpha^*(\varphi)\} \, \gamma_i(\varphi) \equiv h_i(\varphi) \tag{32}$$

und berechnen die so definierten $d_{\nu i}$, $c_{\nu i}$ durch harmonische Analyse. Damit werden die a_ν, b_ν wegen (31)

$$1 - a_1 = \sum_{i=1}^{K} k_i \, c_{1i} \, , \tag{33}$$

$$-\nu\, a_\nu = \sum_{i=1}^{K} k_i \, c_{\nu i} \qquad (\nu = 2, 3, \ldots 2N) \, , \tag{34}$$

$$\nu\, b_\nu = \sum_{i=1}^{K} k_i \, d_{\nu i} \qquad (\nu = 1, 2, \ldots 2N) \, . \tag{35}$$

Aus (25) und (26) folgt dann

$$\sum_{i=1}^{K} k_i \, d_{0i} = 0 \tag{36}$$

und

$$-\sum_{\nu=2}^{2N} \sum_{i=1}^{K} k_i \, c_{\nu i} + 1 - \sum_{i=1}^{K} k_i \, c_{1i} = 0 \, . \tag{37}$$

Mit

$$s_i = \sum_{\nu=1}^{2N} c_{\nu i} \tag{38}$$

folgt aus (37)

$$\sum_{i=1}^{K} k_i \, s_i = 1 \, . \tag{39}$$

Die Gleichungen (36) und (39) benützen wir dazu, zwei von den Parametern k_i in den übrigen auszudrücken, etwa mittels

$$\left.\begin{aligned} k_1 &= A_0 + \sum_{i=3}^{K} A_i \, k_i \, , \\ k_2 &= B_0 + \sum_{i=3}^{K} B_i \, k_i \, , \end{aligned}\right\} \tag{40}$$

wo die

$$\left.\begin{aligned} A_0 &= \frac{d_{02}}{s_1 d_{02} - s_2 d_{01}} \, , & A_i &= \frac{s_2 d_{0i} - s_i d_{02}}{s_1 d_{02} - s_2 d_{01}} \, , \\ B_0 &= \frac{-d_{01}}{s_1 d_{02} - s_2 d_{01}} \, , & B_i &= \frac{s_i d_{01} - s_1 d_{0i}}{s_1 d_{02} - s_2 d_{01}} \end{aligned}\right| \tag{41}$$

aus den durch die Analyse berechneten Größen d_{0i} und s_i leicht zu bilden sind. Damit lassen sich die a_ν, b_ν aus (33) bis (35) in der Form

$$\left.\begin{aligned} a_\nu &= a_\nu^{(0)} + \sum_{i=3}^{K} k_i\, a_\nu^{(i)} , \\ b_\nu &= b_\nu^{(0)} + \sum_{i=3}^{K} k_i\, b_\nu^{(i)} , \end{aligned}\right\} \tag{42}$$

mit

$$\left.\begin{aligned} a_1^{(0)} &= 1 - A_0\, c_{1,1} - B_0\, c_{1,2} , \\ -\nu\, a_\nu^{(0)} &= A_0\, c_{\nu 1} + B_0\, c_{\nu 2} && (\nu = 2, 3, \ldots 2N) , \\ -\nu\, a_\nu^{(i)} &= A_i\, c_{\nu 1} + B_i\, c_{\nu 2} + c_{\nu i} && (\nu = 1, 2, \ldots 2N) , \\ \nu\, b_\nu^{(0)} &= A_0\, d_{\nu 1} + B_0\, d_{\nu 2} && (\nu = 1, 2, \ldots 2N) , \\ \nu\, b_\nu^{(i)} &= A_i\, d_{\nu 1} + B_i\, d_{\nu 2} + d_{\nu i} && (\nu = 1, 2, \ldots 2N) \end{aligned}\right\} \tag{43}$$

darstellen. Man kann also auch bei der Synthese der Funktionen $x(\varphi)$ und $y(\varphi)$ die den überzähligen Parametern k_i proportionalen Anteile getrennt summieren. Wir setzen

$$\left.\begin{aligned} x^{(0)}(\varphi) &= \cos\varphi - \sum_{\nu=0}^{2N} \left(a_\nu^{(0)} \cos\nu\varphi + b_\nu^{(0)} \sin\nu\varphi\right) , \\ x^{(i)}(\varphi) &= \sum_{\nu=0}^{2N} \left(a_\nu^{(i)} \cos\nu\varphi + b_\nu^{(i)} \sin\nu\varphi\right) && (i = 3, \ldots K) , \\ y^{(i)}(\varphi) &= \sum_{\nu=0}^{2N} \left(a_\nu^{(i)} \sin\nu\varphi - b_\nu^{(i)} \cos\nu\varphi\right) && (i = 0, 3, \ldots K) \end{aligned}\right\} \tag{44}$$

und haben dann nach (6), (7) und (42)

$$\left.\begin{aligned} x(\varphi) &= x^{(0)}(\varphi) - \sum_{i=3}^{K} k_i\, x^{(i)}(\varphi) , \\ y(\varphi) &= y^{(0)}(\varphi) + \sum_{i=3}^{K} k_i\, y^{(i)}(\varphi) . \end{aligned}\right\} \tag{45}$$

Man nimmt also die überzähligen Parameter bis ins Ergebnis mit. Man bekommt auf diese Weise ein Grundprofil $x^{(0)}(\varphi)$, $y^{(0)}(\varphi)$ und kann dazu mit den k_i jeweils noch ganze Scharen von (automatisch geschlossenen und spitzen) Profilen zusätzlich berechnen, ohne weitere Analysen und Synthesen durchführen zu müssen. Dies ist vor allem günstig, wenn man bei Profilserien die Dicke verändern will.

Die Geschwindigkeitsverteilungen solcher Profilserien sind zwar nicht mehr linear in den k_i, aber sie lassen sich ebenfalls einfach berechnen. Da an den Profilen immer die Druckverteilung interessiert, für die nach der *Bernoulli*schen Gleichung

$$\frac{p - p_\infty}{\frac{\varrho}{2} V^2} = 1 - \frac{v^2}{V^2} \tag{46}$$

gilt, geht man sofort auf $v^2(\varphi)$ zu, wofür nach (11) mit (18)

$$v^2(\varphi, \alpha^*(\varphi)) = \frac{1}{\frac{1}{\omega^2(\varphi)} + \frac{\dot{y}^2(\varphi)}{\{\sin[\varphi - \alpha^*(\varphi)] + \sin\alpha^*(\varphi)\}^2}} \tag{47}$$

gilt. Dabei gibt der zweite Term des Nenners die bei kleinem y' kleine Abweichung zwischen ω und v. Für die praktische Berechnung von $1/\omega$ kann man entweder nach (40) und (41) die k_i ausrechnen und in (30) eingehen, oder man kann auch hier Funktionen

$$\gamma^{(0)} = A_0\,\gamma_1 + B_0\,\gamma_2 , \qquad \gamma^{(i)} = A_i\,\gamma_1 + B_i\,\gamma_2 + \gamma_i \tag{48}$$

berechnen, mit welchen

$$\frac{1}{\omega} = \gamma^{(0)} + \sum_{i=3}^{K} k_i\, \gamma^{(i)} \tag{49}$$

wird. Analog setzt man die Funktion $\dot{y}(\varphi)$ aus einzelnen Anteilen zusammen, indem man

$$\dot{y}^{(i)} = \sum_{\nu=1}^{2N} (\nu\, a_\nu^{(i)} \cos \nu\varphi + \nu\, b_\nu^{(i)} \sin \nu\varphi) \tag{50}$$

einführt und am besten gleich Funktionen

$$g^{(i)}(\varphi) = \frac{\dot{y}^{(i)}}{\sin[\varphi - \alpha^*(\varphi)] + \sin \alpha^*(\varphi)} \tag{51}$$

bildet, wenn man mit mehreren Werten k_i rechnen will. Der Nenner von (51) ist dabei schon früher berechnet. Mit

$$g(\varphi) = g^{(0)}(\varphi) + \sum_{i=3}^{K} k_i\, g^{(i)}(\varphi) \tag{52}$$

erhält man dann $v^2(\varphi, \alpha^*)$ nach (47) in dem einfachen Rechnungsgang

$$v^2(\varphi, \alpha^*) = \frac{1}{\left(\frac{1}{\omega(\varphi)}\right)^2 + g^2(\varphi)}\,. \tag{53}$$

Die gesamten Funktionen mit oberem Index i hängen nur von γ_i, γ_1 und γ_2 ab. Dies läßt sich an den A_i, B_i leicht verfolgen. Will man also einmal noch eine zusätzliche Funktion γ_{K+1} einführen, dann ändern sich alle vorangehenden Funktionen nicht, man hat lediglich neue Funktionen $x^{(K+1)}, y^{(K+1)}$ und $g^{(K+1)}$ zu berechnen und kann dann die Zusätze in $x(\varphi)$, $y(\varphi)$ und im Nenner von $v^2(\varphi, \alpha^*)$ anbringen. Es macht dabei auch keine wesentliche Mühe, die vorangehenden Parameter $k_3 \ldots k_K$ noch zu ändern.

Die nachträgliche Einführung einer zusätzlichen Funktion γ_{K+1} ist vor allem bei einer eventuellen Verbesserung der entstehenden Verteilung $v(\varphi, \alpha^*)$ wichtig. Weicht etwa die zu einer Wahl der γ_i und k_i mit $i \leq K$ berechnete Verteilung $v(\varphi, \alpha^*)$, für welche nach (20)

$$\frac{1}{\omega(\varphi)} = \frac{1}{v(\varphi, \alpha^*)\sqrt{1 + y'^2}} \tag{54}$$

gilt, zu sehr von einer beabsichtigten Verteilung $\tilde{v}(\varphi)$ ab, für welche

$$\frac{1}{\tilde{\omega}(\varphi)} = \frac{1}{\omega(\varphi)} + \Delta\left(\frac{1}{\omega(\varphi)}\right) = \frac{1}{\tilde{v}(\varphi)\sqrt{1 + \tilde{y}'^2}} \tag{55}$$

gelten sollte, dann wählt man, da $\tilde{y}'$ und y' sicher wenig voneinander abweichen,

$$\Delta\left(\frac{1}{\omega(\varphi)}\right) = \gamma_{K+1}(\varphi) = \left(\frac{1}{\tilde{v}(\varphi)} - \frac{1}{v(\varphi, \alpha^*)}\right)\frac{1}{\sqrt{1 + y'^2}} \tag{56}$$

und geht damit in den Ansatz (30) ein. Entsprechend der Herleitung von (56) nimmt man an, daß die Korrektur γ_{K+1} mit $k_{K+1} = 1$ am besten arbeitet. Man bemerkt aber im praktischen Gebrauch, daß damit die Korrektur gern über das Ziel hinausschießt. Man kann dies mit kleineren Werten k_{K+1} vermeiden, deren günstigste Größe man leicht durch Ausprobieren an wenigen Stellen ermitteln kann.

Berechnet man symmetrische Profile, dann ist $\dot{x}(\varphi)$ eine ungerade Funktion, und man muß sie nur im halben Intervall vorgeben. Dann verschwinden alle b_ν und d_ν, und man hat bei allen Analysen und Synthesen reine Sinus- oder Cosinusprozesse, die durchweg nur etwa den halben Aufwand der gemischten erfordern. Die Schließungsbedingung (34) läuft in diesem Fall leer. Wir können dann nur mittels (39) einen der Parameter k_i in den anderen ausdrücken. Damit wir die abgeleiteten Formeln nicht ändern müssen, setzen wir in diesem Fall $\gamma_2(\varphi) \equiv 0$ und drücken k_i durch (39) in den k_i mit $i \geq 3$ aus. Wir erhalten dann statt (41)

$$A_0 = \frac{1}{s_1}\,, \qquad A_i = -\frac{s_i}{s_1} \quad (i \geq 3)\,, \quad B_i = 0\,; \tag{57}$$

alles andere bleibt vollständig erhalten.

Oft ist es auch bei unsymmetrischen Profilen möglich, wenigstens einzelne γ_i als ungerade Funktionen zu wählen und auch so Arbeit zu sparen. Alle diese Einzelheiten sind im praktischen Gebrauch leicht zu übersehen.

Es sei nur noch bemerkt, daß die Geschwindigkeit $v(\varphi, \alpha^*)$ nach (53) nicht unbedingt mit berechnet werden muß, wenn man etwa bei dünnen Profilen die Geringfügigkeit des Wurzeleinflusses in (20) übersehen kann, oder wenn man auf hohe Genauigkeit keinen Wert legt. Die alleinige

Berechnung von Profilen oder Profilserien ist dann wirklich bequem zu erledigen. Bei Bedarf kann man dann $v(\varphi, \alpha^*)$ immer noch nachträglich genau berechnen, oder wenigstens den Wurzeleinfluß graphisch mit dem in (12) eingeführten Steigungswinkel Θ des Profils abschätzen. Man kann also das beschriebene Vorgehen bis zum Näherungsverfahren vereinfachen und von ihm aus aufbauend sich erst den genauen Fehler verschaffen und ihn gegebenenfalls durch eine Korrektur beseitigen.

An den Beispielen der folgenden Ziffer ist nun der gesamte Rechnungsgang einschließlich der sinngerechten Wahl der γ_i nochmals zu verfolgen.

5. Beispiele. A. Als erstes Beispiel wollen wir die Berechnung einer symmetrischen Profilserie durchführen, bei welcher auf der Profiloberseite bei einem Anstellwinkel von $\alpha^* = -0{,}9°$ von der Nase bis etwa 80% der Flügeltiefe konstante Geschwindigkeit herrschen soll. Der dahinter folgende Druckanstieg soll erst steiler, dann flacher sein. Der physikalische Hintergrund dieser Aufgabenstellung, die mit zu dieser Arbeit angeregt hat, wurde an anderer Stelle beschrieben[1].

Um die konstante Geschwindigkeit zu erzielen, wählen wir im Bereich der Oberseite $\alpha^*(\varphi) = -0{,}9°$ und $\gamma_1(\varphi) = 1$. Nur in der Nähe der Flügelnase, also bei $\varphi \approx \pi$ können wir diese Festsetzung nicht gebrauchen, denn dort wäre sonst nach (31) $\dot{x}(\varphi = \pi + 2\alpha^*) = 0$, was wegen der Symmetrie erst bei $\varphi = \pi$ eintreten soll. Bei $\varphi = \pi + 2\alpha^*$ liegt ein Staupunkt, wie man in (11) leicht feststellt. Dort muß $v = 0$ und damit $\omega = 0$ vorgegeben werden. Dies geschieht am einfachsten, indem man dort direkt $h(\varphi)$ vorgibt, da diese Größe dort stetig sein muß. Wir wählen also

$$\gamma_1(\varphi) = \begin{cases} 1 & (0 \leq \varphi \leq 165°), \\ \dfrac{\lambda \sin\varphi}{\sin(\varphi - \alpha^*) + \sin\alpha^*} & (165° \leq \varphi \leq 180°) \end{cases}. \tag{58}$$

Damit bei $\varphi = 165°$ Stetigkeit entsteht, muß $\lambda = 0{,}88\,057$ gewählt werden.

Gegen die Hinterkante des Profils muß erfahrungsgemäß der Druck p ansteigen, also nach der *Bernoulli*schen Gleichung (46) die Geschwindigkeit fallen. Soll dies bei 80% der Flügeltiefe beginnen, dann müssen wir von $x = 0{,}6$ ab zu $k_1\gamma_1(\varphi)$ einen Zusatz $k_3\,\gamma_3(\varphi)$ addieren, der bei $x = 0{,}6$ verschwindet, damit $1/\omega$ immer stetig ist. Den in x erst steilen, dann flachen Anstieg des Drucks, also den entsprechenden Abfall von v^2 beziehungsweise ω^2 erreichen wir durch einen linearen Anstieg von γ_3 nach Abb. 2.

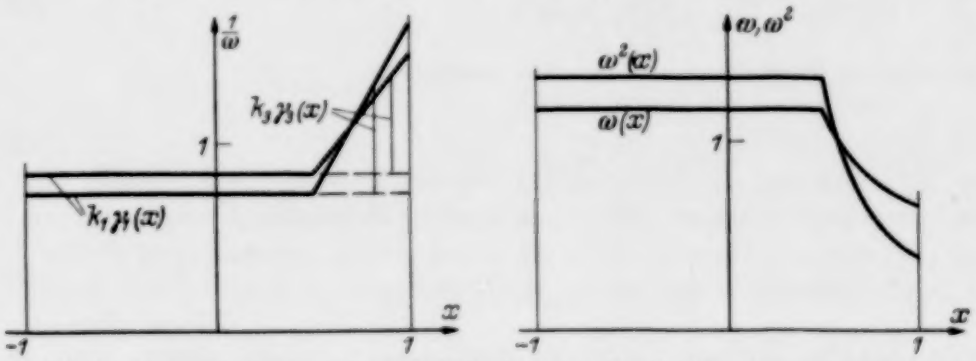


Abb. 2. Skizzen der aus dem Ansatz des Beispiels A entstehenden Verteilungen $1/\omega(\varphi)$, $\omega(\varphi)$ und $\omega^2(\varphi)$.

Übertragen wir ihn auf φ mittels (22), dann ergibt sich für $\gamma_3(\varphi)$ der Ansatz

$$\begin{aligned} \gamma_3(\varphi) &= \cos\varphi - \cos\varphi_1\,, \\ \varphi_1 &= \text{arc cos } 0{,}6\,. \end{aligned} \tag{59}$$

Damit ist der gesamte Ansatz erledigt. Er ist nur in der Nähe der Nase nicht ganz befriedigend, da dort der Wurzelfaktor in (20) ein im voraus nicht zu übersehendes starkes Absinken der Geschwindigkeit $v(\varphi, \alpha^*)$ gegenüber $\omega(\varphi)$ mit sich bringt. Dort nimmt man die Geschwindigkeit so, wie sie auf Grund des Ansatzes entsteht und ist zufrieden, wenn sie nicht über den konstanten, durch $k_1\,\gamma_1\,(\varphi)$ erzielten Wert ansteigt. Dies ist immer garantiert, da der Wurzelfaktor nur ein Absinken von $v(\varphi, \alpha^*)$ bewirkt. Der gleiche Mangel haftet allen zurückliegenden Verfahren an. Er störte bisher nicht, da er auf eine kleine Umgebung der Profilnase beschränkt bleibt.

Mit den Ansätzen (58) und (59) läuft nun das Verfahren ganz automatisch:

1) Wir berechnen die Funktion $\sin(\varphi - \alpha^*) + \sin\alpha^*$ und damit $h_1(\varphi)$ und $h_3(\varphi)$ nach (32) an $2N$ äquidistanten Punkten zwischen $\varphi = 0$ und $\varphi = 180°$.

2) Wir führen die harmonischen Analysen (32) durch und berechnen die c_{r1} und c_{r3}. Wir haben hier reine Sinus-Analysen, die wenig Aufwand erfordern.

[1] *R. Eppler*, Z. Flugwiss. 3 (1955), S. 345.

3) Wir berechnen nach (38) s_1 und s_3, nach (57) A_0 und A_3 sowie nach (43) die $a_\varphi^{(0)}$ und $a_\varphi^{(3)}$.

4) Wir führen die Synthesen der Funktionen $x^{(0)}(\varphi)$, $x^{(3)}(\varphi)$, $y^{(0)}(\varphi)$, $y^{(3)}(\varphi)$, $\dot{y}^{(0)}(\varphi)$ und $\dot{y}^{(3)}(\varphi)$ durch und berechnen aus den beiden letzten $g^{(0)}(\varphi)$ und $g^{(3)}(\varphi)$.

5) Wir wählen ein k_3 und berechnen daraus zuerst nach (53) $v^2(\varphi, \alpha^*)$ und wenn wir damit zufrieden sind, auch $x(\varphi)$ und $y(\varphi)$.

6) Weicht $v^2(\varphi, \alpha^*)$ im konstanten Teil von $1/\omega$ zu sehr von einer Konstanten ab, dann berechnen wir mit einem konstanten Wert $\tilde{v}$ nach (56) noch ein $\gamma_4(\varphi)$, damit entsprechend 1) bis 4) Funktionen $x^{(4)}(\varphi)$, $y^{(4)}(\varphi)$, und $g^{(4)}(\varphi)$, mit ihnen wieder zuerst $v^2(\varphi, \alpha^*)$. Dabei versuchen wir es zunächst an wenigen Stellen mit verschiedenen k_4-Werten, entnehmen den günstigsten und berechnen damit $v^2(\varphi, \alpha^*)$, $x(\varphi)$ und $y(\varphi)$.

Mit k_3 kann das Dickenverhältnis

$$\delta = \frac{2\, y_{max}}{l} \tag{60}$$

des Profils geregelt werden. Dabei ist

$$l = l^{(0)} - k_3\, l^{(3)} \tag{61}$$

mit

$$l^{(i)} = x^{(i)}(0) - x^{(i)}(180^\circ)\,, \tag{62}$$

während y_{max} nicht von vorn herein anzugeben ist, da die $y_{max}^{(i)}$ nicht an den gleichen Stellen φ auftreten, also auch die Stellen φ, die auf y_{max} führen, von δ abhängig sind. Wir berücksichtigen diese Abhängigkeit nicht, sondern nehmen statt (60) ein Dickenverhältnis

$$\delta' = \frac{2\, y(\varphi_e)}{l} = \frac{2\, y_e}{l}\,, \tag{63}$$

bei welchem wir y_e an einer festen, ungefähr beim Maximum y_{max} liegenden Stelle φ_e entnehmen. Damit wird δ nach (60) höchstens geringfügig größer als δ', wenn y_{max} etwas größer ist als y_e. Der Unterschied ist aber unwesentlich, da $y(\varphi)$ in der Nähe des Maximums sehr flach verläuft. In (63) ist

$$y_e = y^{(0)}(\varphi_e) + k_3\, y^{(3)}(\varphi_e) = y_e^{(0)} + k_3\, y_e^{(3)}\,, \tag{64}$$

und es folgt

$$k_3 = \frac{l^{(0)}\,\delta' - 2\, y_e^{(0)}}{l^{(3)}\,\delta' + 2\, y_e^{(3)}}\,. \tag{65}$$

Ganz analog geht man vor, wenn man auch in 6) gleichzeitig mit der Wahl von k_4 auch noch k_3 so festlegen will, daß ein vorgegebenes Dickenverhältnis entsteht. Hierfür gilt dann

$$\delta' = \frac{2\,(y_e^{(0)} + k_3\, y_e^{(3)} + k_4\, y_e^{(4)})}{l^{(0)} - k_3\, l^{(3)} - k_4\, l^{(4)}} \tag{66}$$

oder

$$k_3 = \frac{(l^{(0)} - k_4\, l^{(4)})\,\delta' - 2\,(y_e^{(0)} + k_4\, y_e^{(4)})}{l^{(3)}\,\delta' + 2\, y_e^{(3)}}\,. \tag{67}$$

Wir können auf diese Weise Profile mit allen gebräuchlichen Dickenverhältnissen berechnen. Wir verfolgen hier aber nur den relativ hohen Wert $\delta' = 0{,}21$ näher, bei dem der Einfluß der Korrektur gut zu erkennen ist. Weitere Ergebnisse wurden schon an anderer Stelle bekanntgegeben [1]. Die numerischen Rechnungen wurden mit einem vom Verfasser aufgestellten Rechenschema für Analyse und Synthese mit $N = 12$ durchgeführt. Dies ändert am Prinzip nichts. Man kann je nach der gewünschten Genauigkeit ebensogut mit den Rechenformularen von *Hußmann* [2] mit $N = 9$ oder $N = 18$ arbeiten.

In Tabelle 1 sind γ_1, γ_3 und die zunächst daraus berechneten Funktionen $x^{(0)}$, $x^{(3)}$, $y^{(0)}$, $y^{(3)}$, $g^{(0)}$ und $g^{(3)}$ angegeben. Für y_e wurde die Stelle $\varphi_e = 13 \cdot 7{,}5^\circ$ genommen, die nach (65) mit $\delta' = 0{,}21$ auf $k_3 = 1{,}27521$ führt. Dazu ergibt sich das $v^2(\varphi, \alpha^*)$ der neunten Spalte, das in Abb. 3 über $x(\varphi)$ nach (22) aufgetragen ist. Zum Vergleich ist auch $\omega^2(\varphi)$ gestrichelt eingezeichnet. Die Berechnung von $x(\varphi)$ nach (45) ist noch nicht notwendig, wenn man nur den Einfluß des Wurzelfaktors übersehen will. Dieser macht bei unserem Profil so viel aus, daß wenigstens in dem Bereich, wo die Geschwindigkeit konstant werden sollte, eine Korrektur angebracht ist.

Die Korrektur ist in den letzten Spalten von Tabelle 1 zu verfolgen. Die Funktion γ_4 ist nach (56) mit einem konstanten $\tilde{v}$ zwischen $\varphi = 8 \cdot 7{,}5^\circ$ und $\varphi = 18 \cdot 7{,}5^\circ$ berechnet. Dieser Bereich um-

[1] *R. Eppler*, Fußnote 1 von S. 446.
[2] Fußnote 1 von S. 442.

Tabelle 1. *Beispiel A, Zwischenergebnisse.*

$\varphi/7{,}5°$	γ_1	γ_2	$x^{(0)}$	$x^{(3)}$	$y^{(0)}$	$y^{(3)}$
0	1,00 000	0,40 000	0,99 491	0,07 870	0,00 000	0,00 000
1		0,39 144	0,98 629	0,08 069	0,00 005	0,00 015
2		0,36 593	0,96 053	0,03 673	0,00 018	0,00 258
3		0,32 388	0,91 819	0,09 478	0,00 047	0,00 905
4		0,26 603	0,86 000	0,10 358	0,00 085	0,02 085
5		0,19 335	0,78 699	0,10 946	0,00 139	0,03 868
6		0,10 711	0,70 043	0,10 973	0,00 205	0,06 123
7		0,00 876	0,60 182	0,09 999	0,00 292	0,08 470
8		0,00 000	0,49 296	0,08 426	0,00 390	0,10 157
9			0,37 567	0,06 759	0,00 500	0,11 424
10			0,25 202	0,04 901	0,00 620	0,12 361
11			0,12 415	0,03 006	0,00 749	0,12 921
12			— 0,00 568	0,01 129	0,00 881	0,13 197
13			— 0,13 524	— 0,00 732	0,01 010	0,13 254
14			— 0,26 228	— 0,02 631	0,01 133	0,13 040
15			— 0,38 459	— 0,04 448	0,01 247	0,12 507
16			— 0,50 003	— 0,06 116	0,01 340	0,11 736
17			— 0,60 662	— 0,07 639	0,01 411	0,10 795
18			— 0,70 243	— 0,09 079	0,01 446	0,09 650
19			— 0,78 591	— 0,10 321	0,01 440	0,08 284
20			— 0,85 544	— 0,11 324	0,01 381	0,06 772
21			— 0,09 995	— 0,12 106	0,01 245	0,05 174
22	1,00 000		— 0,94 827	— 0,12 681	0,00 995	0,03 492
23	1,15 832		— 0,97 082	— 0,13 014	0,00 537	0,01 750
24	0,00 000	0,00 000	— 0,97 853	— 0,13 125	0,00 000	0,00 000

Fortsetzung.

$\varphi/7{,}5°$	$g^{(0)}$	$g^{(3)}$	$v^2(\varphi, \alpha^*)$	γ_4	$x^{(4)}$	$y^{(4)}$	$g^{(4)}$
0	0,00 000	0,00 000	0,56 437	0,00 000	— 0,00 447	0,00 000	0,00 000
1	0,00 612	0,04 159	0,57 259		— 0,00 454	— 0,00 004	— 0,00 364
2	0,00 622	0,13 043	0,59 254		— 0,00 472	— 0,00 010	— 0,00 215
3	0,00 643	0,17 479	0,63 473		— 0,00 505	— 0,00 024	— 0,00 447
4	0,00 700	0,23 189	0,69 547		— 0,00 548	— 0,00 050	— 0,00 477
5	0,00 774	0,25 502	0,79 961		— 0,00 605	— 0,00 095	— 0,00 751
6	0,00 831	0,26 631	0,96 332		— 0,00 668	— 0,00 162	— 0,00 864
7	0,00 890	0,19 993	1,31 201	0,00 000	— 0,00 748	— 0,00 276	— 0,01 529
8	0,00 932	0,12 467	1,42 362	0,00 741	— 0,00 788	— 0,00 470	— 0,01 944
9	0,00 972	0,09 518	1,44 657	0,01 405	— 0,00 734	— 0,00 688	— 0,01 738
10	0,00 995	0,05 831	1,46 797	0,02 021	— 0,00 602	— 0,00 881	— 0,01 384
11	0,01 018	0,03 217	1,47 769	0,02 300	— 0,00 413	— 0,01 019	— 0,00 817
12	0,01 016	0,01 178	1,48 203	0,02 424	— 0,00 202	— 0,01 100	— 0,00 446
13	0,01 004	— 0,00 411	1,48 340	0,02 461	0,00 023	— 0,01 128	0,00 004
14	0,00 955	— 0,03 095	1,48 147	0,02 407	0,00 244	— 0,01 100	0,00 399
15	0,00 891	— 0,05 632	1,47 478	0,02 216	0,00 454	— 0,01 023	0,00 919
16	0,00 743	— 0,07 840	1,46 484	0,01 931	0,00 638	— 0,00 896	0,01 339
17	0,00 559	— 0,10 201	1,45 010	0,01 507	0,00 788	— 0,00 716	0,02 127
18	0,00 171	— 0,14 227	1,41 560	0,00 507	0,00 849	— 0,00 489	0,02 469
19	— 0,00 364	— 0,19 102	1,36 013	0,00 000	0,00 810	— 0,00 311	0,01 781
20	— 0,01 609	— 0,25 371	1,26 672		0,00 756	— 0,00 204	0,01 367
21	— 0,03 725	— 0,35 483	1,09 418		0,00 714	— 0,00 134	0,01 309
22	— 0,11 807	— 0,57 720	0,71 246		0,00 686	— 0,00 081	0,01 564
23	— 0,40 969	— 1,34 273	0,18 495		0,00 669	— 0,00 039	0,03 022
24	— 2,59 769	— 8,57 134	0,00 546	0,00 000	0,00 665	— 0,00 000	0,18 123

faßt, wie in Abb. 4 zu erkennen ist, den wesentlichen Teil des Profilbereichs, in dem die Verbesserung beabsichtigt ist. Nur eine kleine Umgebung der Nase ist nicht eingeschlossen. Dort ist das Absinken der Geschwindigkeit ohnehin physikalisch sinnvoll. Die Größe $\tilde{v}$ wurde so gewählt, daß γ_4 an den Grenzen des φ-Bereichs ungefähr verschwindet, also die Stetigkeit von $1/\alpha$ nicht gestört wird. Die Funktionen $x^{(4)}$, $y^{(4)}$ und $g^{(4)}$ ergeben sich aus γ_4 wieder automatisch. An wenigen Stellen φ wurden dann mit verschiedenen Werten k_4 nach (53) $v^2(\varphi, \alpha^*)$ berechnet, wobei jeweils k_3 nach (67) verwendet wurde. Der Wert $k_4 = 0{,}855$ erwies sich als der günstigste. Er ergab die in Tabelle 2 niedergelegten Ergebnisse. Die Profilkoordinaten wurden dabei noch auf den üblichen Maßstab transformiert, bei dem die Nase bei $X = 0$, die Hinterkante bei $X = 100$ liegt. In Abb. 4 sind die Ergebnisse dargestellt. Die nach (27) berechneten Linien $v^2(\varphi, \alpha)$ sind für $\alpha = 0$ und $\alpha = +\,0{,}9°$

Tabelle 2. *Beispiel A, Endergebnisse.*

$\varphi/7{,}5°$	X	Y	$v^2(\varphi, \alpha^*)$	$\varphi/7{,}5°$	X	Y	$v^2(\varphi, \alpha^*)$
0	100,00	0,00	0,5553	13	40,11	10,50	1,4679
1	99,34	0,01	0,5639	14	34,03	10,42	1,4678
2	97,36	0,21	0,5841	15	28,17	10,10	1,4679
3	94,25	0,73	0,6277	16	22,61	9,61	1,4679
4	90,15	1,67	0,6902	17	17,47	9,00	1,4692
5	85,42	3,09	0,7995	18	12,94	8,23	1,4657
6	80,85	4,88	0,9728	19	9,04	7,24	1,4144
7	75,36	6,73	1,3588	20	5,77	6,06	1,3051
8	70,22	8,02	1,4644	21	3,20	4,75	1,1113
9	64,61	8,98	1,4674	22	1,42	3,30	0,7032
10	58,75	9,69	1,4687	23	0,36	1,68	0,1768
11	52,63	10,14	1,4682	24	0,00	0,00	0,0051
12	46,37	10,39	1,4680		$dc_a/d\alpha = 1{,}176 \cdot 2\pi$		

mit eingezeichnet. Die letztere entspricht wegen der Symmetrie auch der Profilunterseite bei $\alpha = \alpha^* = -0{,}9°$. Die Konstanz von $v^2(\varphi, \alpha^*)$ ist außer in der Nähe der Nase wirklich befriedigend.

Mit der Länge l nach (61) ist mittels (15) die Größe $dc_a/d\alpha$ berechnet, die vielfach interessiert. Für die praktische Verwendung des Profils, insbesondere für die Wölbung mittels Wirbelverteilung werden oft noch einige andere Daten verlangt. Die Geschwindigkeitsänderung $\Delta v(\varphi)$ bezogen auf eine Änderung des Auftriebsbeiwerts $\Delta c_a = 1$ berechnet man über den Anstellwinkel α_E, bei dem $c_a = 1$ ist. Er folgt leicht aus (15). Mit ihm ist $\Delta v(\varphi) = v(\varphi, \alpha_E) - v(\varphi, 0)$. Darauf gehen wir hier jedoch nicht näher ein, da wir auch gewölbte Profile mit unserem Verfahren berechnen. Ebenso ist die Angabe des Nasenradius überflüssig, da bei $N = 12$ die Punkte in der Nähe der Nase sehr dicht liegen.

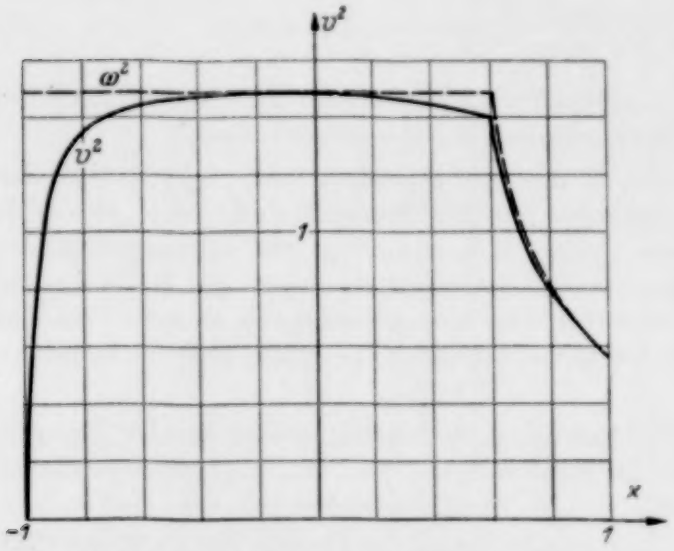


Abb. 3. Der Einfluß des Wurzelfaktors beim Beispiel A.

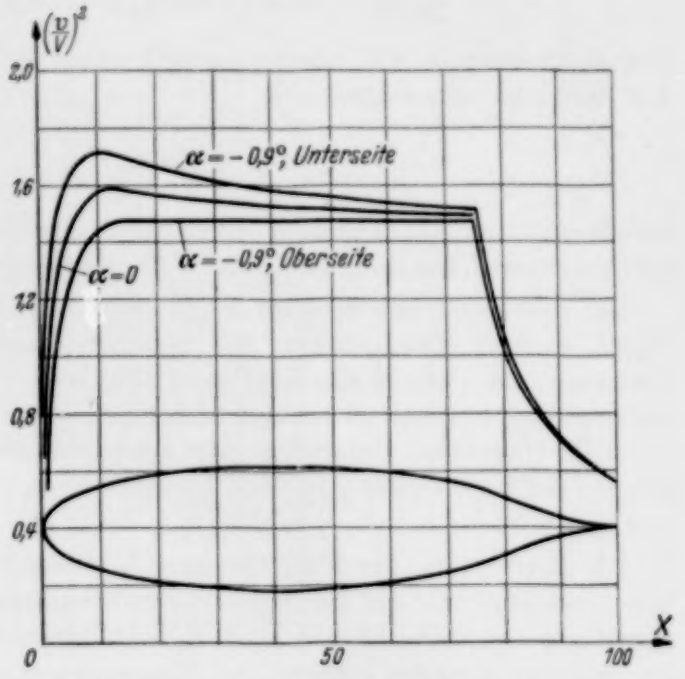


Abb. 4. Das Profil des Beispiels A mit der korrigierten Geschwindigkeitsverteilung.

Es sei aber noch bemerkt, daß man bei den dünneren Profilen unserer Serie die Funktion γ_4 nicht jedesmal neu berechnen muß. Man kann sie vielmehr samt den Funktionen $x^{(4)}$, $y^{(4)}$ und $g^{(4)}$ dem Beispiel $\delta' = 0{,}21$ entnehmen und erhält damit einen genügend genauen Ausgleich. Man muß dabei auch die Größe von k_4 nicht jedesmal neu ausprobieren, sondern erhält mit $k_4 = 0{,}855\,(\delta'/0{,}21)^2$ gute Verbesserungen.

B. Als zweites Beispiel berechnen wir eine Serie von unsymmetrischen Profilen, die bei einem Anstellwinkel $\alpha_1 = 5{,}6°$ auf der Oberseite, bei $\alpha_2 = 7{,}4°$ auf der Unterseite von der Nase bis etwa 60% der Tiefe konstante Geschwindigkeit haben sollen. Der Druckanstieg auf der Hinterseite soll wieder eine ähnliche Form wie beim Beispiel A haben. Diese Aufgabenstellung ist, abgesehen von der etwas kleineren Länge der Strecken konstanter Geschwindigkeit, das Analogon zum Beispiel A, nur sind die Anstellwinkel der konstanten Geschwindigkeit auf Ober- und Unterseite um + 6,5°

verschoben. Wir bekommen gewölbte Profile. Wir wählen analog zum Beispiel A

$$\alpha^*(\varphi) = \begin{cases} \alpha_1 = 5{,}6^\circ & (0 \leq \varphi \leq \pi + 2\,\alpha_n)\,, \\ \alpha_2 = 7{,}4^\circ & (\pi + 2\,\alpha_n \leq \varphi \leq 2\,\pi)\,, \end{cases} \tag{68}$$

$$\gamma_1(\varphi) = \begin{cases} 1 & (0 \leq \varphi \leq \varphi_1)\,, \\ \lambda \dfrac{\sin(\varphi - 2\,\alpha_n)}{\sin(\varphi - \alpha_1) + \sin\alpha_1} & (\varphi_1 \leq \varphi \leq \pi + 2\,\alpha_n)\,, \\ 0 & (\pi + 2\,\alpha_n \leq \varphi \leq 2\,\pi)\,, \end{cases} \tag{69}$$

$$\gamma_2(\varphi) = \begin{cases} 0 & (0 \leq \varphi \leq \pi + 2\,\alpha_n)\,, \\ \lambda \dfrac{\sin(\varphi - 2\,\alpha_n)}{\sin(\varphi - \alpha_2) + \sin\alpha_2} & (\pi + 2\,\alpha_n \leq \varphi \leq \varphi_2)\,, \\ 1 & (\varphi_2 \leq \varphi \leq 2\,\pi)\,. \end{cases} \tag{70}$$

Die zweiten Terme in (69) und (70) vermeiden wieder, daß $\dot{x}(\varphi)$ an den Stellen $\pi + 2\,\alpha_1$ und $\pi + 2\,\alpha_2$ verschwindet und erzeugen bei $\varphi = \pi + 2\,\alpha_n$ senkrechte Tangente. Der vordere Staupunkt liegt allgemein bei $\varphi = \pi + 2\,\alpha$. Die Größe α_n ist also derjenige Anstellwinkel, bei dem der Staupunkt an der Stelle senkrechter Profiltangente, der Nase, liegt. Wir wählen deshalb $\alpha_n = 6{,}5^\circ$ in der Mitte zwischen α_1 und α_2, weil bei diesem Anstellwinkel ohnehin an der Nase ungefähr symmetrischer Strömungscharakter (bzw. der „stoßfreie Eintritt") zu erwarten ist. Außerdem wählen wir $\lambda = 0{,}87389$, dann wird die Übergangsstelle φ_2, an welcher die beiden Ausdrücke für γ_2 die gleichen Werte bekommen, $\varphi_2 = 210^\circ$, während die entsprechende Stelle φ_1 von γ_1 etwas größer als 180° wird. Auf den genauen Wert kommt es nicht an, da wir $\gamma_1(\varphi)$ nur an den Stellen 180° und $187{,}5^\circ$ benützen. Zwischen diesen beiden Werten liegt dann der Übergang von der ersten zur zweiten Darstellung von $\gamma_1(\varphi)$.

Den Druckanstieg wählen wir ebenfalls analog zum Beispiel A. Wir haben dort bemerkt, daß $x(\varphi)$ im hinteren Bereich des Profils sich gegenüber (22) verkleinert. Wir wählen deshalb

$$\gamma_3(\varphi) = \cos\varphi - \cos\varphi_3\,, \qquad \cos\varphi_3 = 0{,}3\,, \qquad (0 \leq \varphi \leq \varphi_3)\,, \tag{71}$$

und nicht $\cos\varphi_3 = 0{,}2$, wie es an sich entsprechend der Aufgabenstellung nach (22) sein müßte. Auf der Unterseite wählen wir

$$\gamma_3(\varphi) = (\cos\varphi - \cos\varphi_3)\,\frac{\sin(\varphi + \alpha_1) - \sin\alpha_1}{\sin(\varphi - \alpha_2) + \sin\alpha_2} \quad (2\,\pi - \varphi_3 \leq \varphi \leq 2\,\pi)\,, \tag{72}$$

an allen nicht erfaßten Stellen soll $\gamma_3(\varphi)$ verschwinden. Damit wird $h_3(\varphi)$ nach (32) mit $\alpha^*(\varphi)$ nach (68) eine ungerade Funktion, wodurch an der numerischen Rechnung einiges gespart wird.

Die Stetigkeit von $h(\varphi)$ nach (24) ist gesichert, weil die Sprungstellen von $\alpha^*(\varphi)$ jeweils dort liegen, wo $h(\varphi)$ verschwindet. Die Beschränkung von $\gamma_1(\varphi)$ auf die Oberseite und von $\gamma_2(\varphi)$ auf die Unterseite ist vorteilhaft, weil nach (25) wegen der positiven Werte $\alpha^*(\varphi)$ ein Geschwindigkeitsunterschied zwischen Ober- und Unterseite entstehen muß. Dieser ist besonders gut zu übersehen, wenn für Ober- und Unterseite zwei getrennte Parameter k_1 und k_2 zur Verfügung stehen. Das Vorzeichen der Funktionen $\gamma_i(\varphi)$ ist, wie man nach (12) leicht nachprüft, so gewählt, daß alle k_i positiv werden.

Die Berechnung der Funktionen $x^{(i)}$, $y^{(i)}$ und $g^{(i)}$ läuft genau wie beim vorangehenden Beispiel. Wir verzichten hier auf die tabellarische Wiedergabe der Rechnungen. In Abb. 5 ist das entstehende Profil $x(\varphi)$, $y(\varphi)$ für $k_3 = 0$ und $k_3 = 1$ dargestellt. Einige Punkte gleicher φ-Werte sind miteinander durch Geraden verbunden. Man erkennt so, auf welche Weise die Profile für Zwischenwerte von k_3 entstehen: Man braucht wegen (45) nur auf jeder Verbindungsgeraden k_3 im Verhältnis zur ganzen Länge abzutragen. Für $k_3 = 0{,}5$ ist diese Konstruktion durchgeführt. Ebenso können wir für alle anderen Werte k_3 Profile berechnen. Wir greifen wieder einen festen heraus, nämlich $k_3 = 0{,}45\,037$, der auf eine Profildicke $\delta \approx 0{,}15$ führt. Die hiermit berechneten Koordinaten $X(\varphi)$, $Y(\varphi)$, die Geschwindigkeiten $v^2(\varphi, \alpha^*)$ sowie die nach (15) und (17) berechneten Größen $dc_a/d\alpha$ und c_{m0} sind in Tabelle 3 angegeben. Die Koordinaten sind dabei so transformiert, daß das Profil von $X = 0$ bis $X = 100$ geht und ungefähr waagrecht liegt, was durch eine Drehung um $6{,}5^\circ$ erreicht wurde. In Abb. 6 sind die Ergebnisse dargestellt. Zu $v^2(\varphi, \alpha^*)$ wurden ergänzend nach (27) die gesamten Verteilungen $v^2(\varphi, \alpha_1)$ und $v^2(\varphi, \alpha_2)$ berechnet und mit eingezeichnet. Unter dem Diagramm der Abb. 6 ist das Profil noch in der ursprünglichen Lage dargestellt, auf welche sich das y' des Wurzelfaktors bezieht. Die gestrichelten Linien geben $\omega^2(\varphi)$ in den Teilen, in denen diese Funktion konstant ist. Die entstehende Verteilung $v^2(\varphi, \alpha^*)$, also auf der Oberseite $v^2(\varphi, \alpha_1)$, auf der Unterseite $v^2(\varphi, \alpha_2)$ ist an den Stellen waagrechter Tangente (des nicht gedrehten Profils) identisch mit $\omega^2(\varphi)$, an allen anderen Stellen kleiner.

Der Einfluß des Wurzelfaktors ist erheblich. Vor allem rückt das (in der Grenzschichttheorie entscheidende) Geschwindigkeitsmaximum auf der Oberseite nach hinten, auf der Unterseite nach vorn. Dieser unterschiedliche Einfluß wurde bisher noch nirgends erfaßt, da sowohl bei *Theodorsen* [1] als auch bei *Truckenbrodt* [2] der Wurzelfaktor nur am ungewölbten Profil berücksichtigt wird. Vor

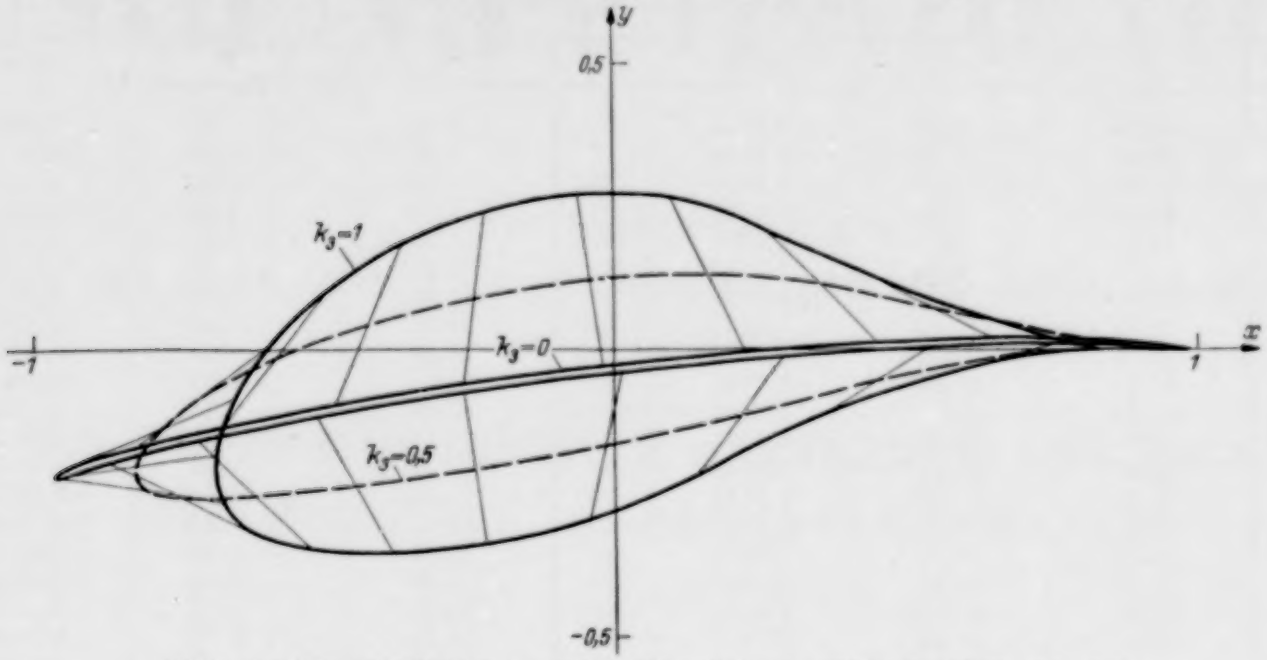


Abb. 5. Die beim Beispiel B für $k_2 = 0$, $k_3 = 0{,}5$ und $k_3 = 1$ entstehenden Profile $x(\varphi)$, $y(\varphi)$.

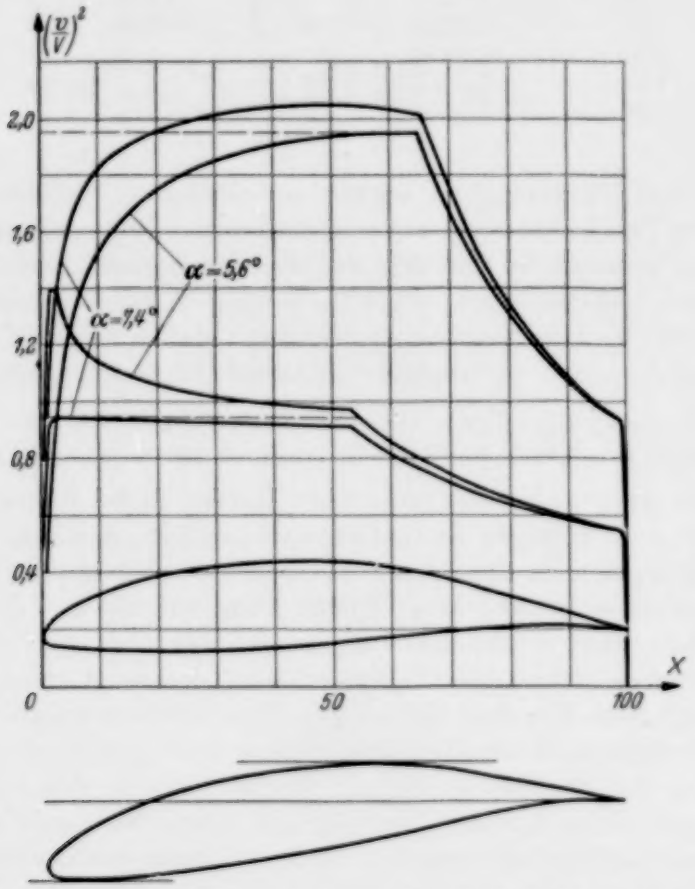


Abb. 6. Ein spezielles Profil der Serie B samt seinen Geschwindigkeitsverteilungen.

allem bei stärker gewölbten Profilen ist es also wichtig, die zum Profil gehörenden exakten Geschwindigkeitsverteilungen zu kennen. Eine Änderung derselben wurde bei diesem Beispiel nicht durchgeführt, da die Einflüsse des Wurzelfaktors weitgehend vorauszusehen waren und die entstehenden Verteilungen auch ohne Korrektur physikalisch günstig sind.

[1] Fußnote 4 von S. 436.
[2] Fußnote 6 von S. 436.

Es sei abschließend noch bemerkt, daß keines der beiden behandelten Beispiele mit den bisher vorliegenden Methoden hätte direkt angegangen werden können. Dies wurde erst durch die hier eingeführte Wahl $\alpha^*(q)$ ermöglicht.

Tabelle 3. *Beispiel B, Endergebnisse.*

$\varphi/7{,}5°$	X	Y	$v^2(\varphi, \alpha^*)$	$\varphi/7{,}5°$	X	Y	$v^2(\varphi, \alpha^*)$
0	100,00	0,00	0,0000	26	0,02	— 1,98	0,0006
1	99,45	0,19	0,9034	27	0,56	— 3,28	0,5911
2	97,94	0,67	0,9452	28	1,93	— 4,31	0,9275
3	95,32	1,46	0,9795	29	4,13	— 5,08	0,9507
4	91,86	2,57	1,0331	30	7,24	— 5,67	0,9472
5	87,72	4,01	1,1019	31	11,06	— 6,07	0,9422
6	82,97	5,76	1,1975	32	15,57	— 6,33	0,9379
7	77,91	7,72	1,3235	33	20,77	— 6,44	0,9345
8	72,70	9,80	1,4961	34	26,40	— 6,39	0,9307
9	67,41	11,83	1,7304	35	32,44	— 6,20	0,9286
10	62,29	13,42	1,9492	36	38,78	— 5,85	0,9243
11	57,02	14,43	1,9593	37	45,18	— 5,31	0,9202
12	51,48	15,03	1,9529	38	51,62	— 4,53	0,9074
13	45,95	15,26	1,9373	39	58,18	— 3,33	0,8251
14	40,36	15,15	1,9165	40	64,91	— 2,05	0,7434
15	34,83	14,73	1,8865	41	71,76	— 0,90	0,6856
16	29,50	14,01	1,8507	42	78,36	— 0,04	0,6432
17	24,34	13,04	1,8051	43	84,39	0,51	0,6119
18	19,52	11,82	1,7488	44	89,74	0,73	0,5888
19	15,16	10,38	1,6766	45	94,10	0,68	0,5724
20	11,21	8,78	1,5833	46	97,30	0,46	0,5603
21	7,84	7,04	1,4531	47	99,34	0,16	0,5477
22	5,07	5,20	1,2710	48	100,00	0,00	0,0000
23	2,83	3,34	0,9990				
24	1,29	1,46	0,5785				
25	0,38	— 0,38	0,1025				

$$dc_a/d\alpha = 1{,}120 \cdot 2\pi$$
$$c_{m\,0} = -\,0{,}1848$$

6. Zusammenfassung und Ausblick. Es wurde ein einfaches Verfahren angegeben, das die Berechnung von Profilen und Profilserien mit vorausbestimmten Eigenschaften der Geschwindigkeitsverteilung sehr allgemein ermöglicht. Es erlaubt, die Geschwindigkeitsverteilung stückweise bei verschiedenem Anstellwinkel einzuführen, die Profildicke zu regeln, und es kann ohne Schwierigkeiten auf unsymmetrische Profile angewandt werden. Dabei zeigt es sich, daß die bisher bekannten Näherungsverfahren einen wesentlichen Einfluß nicht berücksichtigen.

Das Rechenverfahren liefert zu den berechneten Profilen ihre exakte Geschwindigkeitsverteilung, diese stimmt nur nicht exakt mit der Vorgabe überein, sondern ist ihr gegenüber um einen Faktor $1/\sqrt{1+y'^2} = \cos\Theta$ verringert, wo Θ der von vorn herein nicht bekannte Steigungswinkel des Profils ist. Der Einfluß des cos-Faktors ist fast überall so klein, daß man die Abweichung in Kauf nehmen kann oder sie durch einen einzigen Korrekturschritt beseitigen kann. Nur in der Umgebung der Profilnase ist der Einfluß zu stark. Dort beläßt man, wie bei den früheren Arbeiten, das Absinken der Geschwindigkeit zum Staupunkt hin so, wie es der cos-Faktor ergibt. Dieser letzte Mangel wird in einer weiteren Arbeit des Verfassers noch beseitigt werden, die auf anderem Weg auch sonst einige tiefergehende Ergebnisse zeitigt. Das dort entwickelte Verfahren ist zwar im Aufwand des einzelnen Profils nicht ungünstiger als das vorliegende, es erlaubt aber keine so einfache serienweise Regelung der Profildicke mehr. Solange man es also mit serienweisen, nicht sehr dicken oder sehr stark gewölbten Profilen zu tun hat, deren Geschwindigkeitsverteilungen nicht sehr genau mit den Vorgaben übereinstimmen müssen, wird das vorliegende Verfahren vorteilhafter bleiben.

(Eingegangen am 17. Mai 1955)

Anschrift des Verfassers: Dr. *R. Eppler*, Stuttgart-W, Leibnizstr. 84.